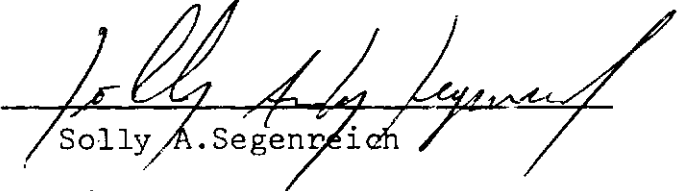


UM SISTEMA AUTOMÁTICO DE PROJETO
DE ESTRUTURAS ÓTIMAS

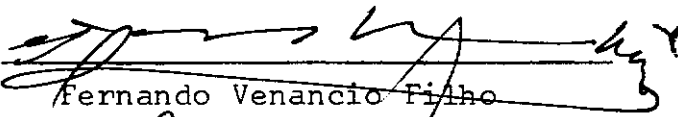
José Herskovits

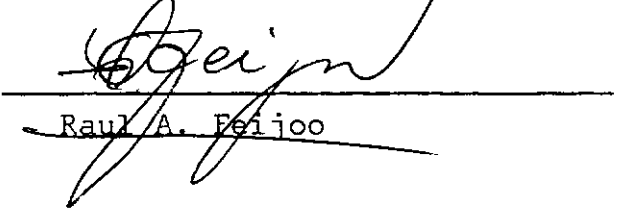
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JA
NEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovada por:


Solly A. Segenreich


Luis Bevilacqua


Fernando Venancio Filho


Raul A. Feijoo

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
DEZEMBRO DE 1976

AGRADECIMIENTOS

Al Prof. Solly A. Segenreich, por la segura y atenta orientación prestada a este trabajo.

Al Prof. Luis Bevilacqua, fue su apoyo constante y desinteresado, que me permitió alcanzar esta meta.

Al Ing. Néstor Zouain, debido a su gran compañerismo la tarea fue más fructífera y agradable.

A quienes fueron mis profesores, durante mi estadía en la COPPE, por las enseñanzas e incentivos recibidos.

A los integrantes del Programa de Ingeniería Mecánica de la COPPE, en la persona de su Coordinador, el Prof. Leopoldo E.G. Bastos, por el apoyo y amistad que me fueron brindados.

RESUMEN

Se desarrolla un sistema computacional, que dimensiona en forma automática, estructuras óptimas de gran porte. El mismo utiliza un algoritmo de optimización de tipo "Criterio de Optimalidad", en el que se tratan las restricciones de desigualdad, mediante la definición de variables de desvío.

El sistema considera estructuras discretizables mediante la utilización de elementos finitos, sometidas a varios estados de carga y de geometría prefijada por el proyectista. Las restricciones incluídas son aquellas que limitan desplazamientos nodales y tensiones en los elementos, adicionando la consideración de pandeo, en los elementos axiales sometidos a compresión.

Se describen los métodos de análisis estructural utilizados y el cálculo de los gradientes de las funciones de respuesta, al igual que la organización general del sistema. También se presentan, en forma condensada, los fundamentos matemáticos del algoritmo de optimización.

La resolución de diversos ejemplos estructurales, permite observar que el sistema actúa en forma eficiente y competitiva.

SUMÁRIO

É desenvolvido um sistema computacional, que dimensiona automaticamente estruturas ótimas de grande porte. Este utiliza um algoritmo de otimização do tipo "Critério de Otimalidade", no qual se tratam as restrições de desigualdade, mediante a definição de variáveis de desvio.

O sistema considera estruturas discretizáveis mediante a utilização de elementos finitos, submetidas a vários estados de carga e de geometria prefixada pelo projetista. As restrições incluídas são aquelas que limitam deslocamentos nodais e tensões nos elementos, adicionando a consideração da flambagem nos elementos axiais submetidos a compressão.

São descritos os métodos de análise estrutural utilizados, o cálculo dos gradientes das funções de resposta e também a organização geral do sistema.

Também se apresentam com forma condensada, os fundamentos matemáticos do algoritmo de otimização.

A resolução de diversos exemplos estruturais, permite observar que o sistema atua de forma eficiente e competitiva.

ABSTRACT

A computer system for the automatic sizing of large-scale structures is developed, making use of an "optimality criterion" algorithm, where inequality constraints are treated with the aid of slack-variables.

Attention is focused on fixed geometry structures which can be idealized using finite elements. Multiple loading conditions are also considered. Element stresses, nodal displacements, and buckling of axially compressed elements are considered as constraints.

Methods of structural analysis, calculation of gradients of response functions and the general organization of the system are thoroughly described.

The mathematical foundations of the optimization algorithm, are also showed in condensed form.

The automatic design of a variety of structural systems, allows to conclude that the system performance is efficient and competitive.

INDICE

	<u>PAG.</u>
1. INTRODUCCIÓN	1
2. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA DE SÍNTESIS ESTRUCTURAL	4
3. UN SISTEMA DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL ORIENTADO HACIA EL PROYECTO	7
3.1. Introducción	7
3.2. Características del problema estructural	8
3.3. Características elásticas de la estructura	9
3.4. Cálculo de los desplazamientos	12
3.5. Cálculo de las tensiones	14
3.6. Criterios de resistencia	15
3.7. Barras de apoyos articulados sometidas a com- presión	16
3.8. Montaje del vector de restricciones	19
3.9. Organización del sistema de análisis	19
3.9.1. El preprocesador	20
3.9.2. El analizador	21
4. EL SISTEMA DE CÁLCULO DE DERIVADAS	23
4.1. Derivadas del vector de desplazamientos	23
4.2. Derivadas de las tensiones	24
4.3. Derivadas de las tensiones críticas	25
4.4. Organización del sistema de derivación	27
5. EL OPTIMIZADOR	29
5.1. El modelo matemático	29
5.2. Obtención del algoritmo	29
5.3. Algunas observaciones	32
5.4. Determinación del parámetro de relajación	33
5.5. Tratamiento de las restricciones infactibles	35
5.6. Criterios de terminación	36
5.7. Restricciones sobre las variables	37

	<u>PAG.</u>
6. REDUCCIÓN DE LA CANTIDAD DE RESTRICCIONES	39
6.1. Filtrado por razón de respuesta	39
6.2. Regionalización	41
6.3. Filtrado por estado de carga	41
6.4. Consideraciones sobre la eliminación de restric- ciones	42
7. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA DE SÍNTESIS ESTRUCTURAL	43
7.1. Algunas características funcionales	43
7.2. Organización	43
7.3. El bloque de recuperación	45
8. EJEMPLOS DE APLICACIÓN	47
8.1. Parámetros de diseño	49
8.2. Reticulado plano de 10 elementos	52
8.2.1. Restricciones de tensión	52
8.2.2. Restricciones de tensión y desplazamiento .	52
8.2.3. Restricciones de tensión y pandeo	59
8.2.4. Restricciones de tensión, pandeo y des- plazamiento	61
8.3. Viga de placas y barras	62
8.4. Torre de 72 barras	67
8.4.1. Restricciones de tensión y desplazamiento .	67
8.4.2. Restricciones de tensión, pandeo y des- plazamiento	72
8.5. Reticulado plano de 200 elementos	75
8.6. Observaciones sobre el comportamiento del sis- tema	80
9. CONCLUSIONES	82
REFERENCIAS	84
APÉNDICE A. Elementos Finitos Empleados	91
APÉNDICE B. Criterios Prácticos para la Elección de Y(A)..	97

1. INTRODUCCION

"Ingeniería es la actividad a través de la cual son producidos diseños con objetivos materiales". Esta definición utilizada por Fox [1], aunque discutible, da una idea del importante papel asumido por el proyecto en las actividades del ingeniero.

Cuando se habla de proyecto o diseño, generalmente se piensa en la finalidad de lo que se va a proyectar, sin embargo, los conceptos de economía y eficiencia siempre existen en la mente del ingeniero.

El mejor diseño será aquel que cumpla sus funciones del modo mas económico.

Se debe distinguir entre la concepción de un diseño, y su dimensionamiento. Los elementos utilizados, materiales y procedimientos de un proyecto forman parte de su concepción.

El problema de optimización a ser tratado aquí consiste en, una vez establecida la concepción del diseño, dimensionarlo de manera que el proyecto sea "el mejor", utilizando un cierto criterio de evaluación. A la realización de un proyecto, siempre están asociados los factores humanos de conocimientos, creatividad, experiencia, intuición, etc., y estos son preponderantes en todo buen diseño. Sin embargo estos mismos factores no son suficientes por sí solos para establecer las dimensiones de un proyecto óptimo, siendo necesaria la utilización de herramientas matemáticas.

En la gran mayoría de las ramas de la ingeniería, estas herramientas de optimización no están suficientemente desarrolladas o difundidas. Esto origina la utilización de pseudocriterios de optimalidad, siendo el más extendido, asumir que un buen proyecto es aquel en que todos los elementos están exigidos al máximo de su capacidad. La utilización de este criterio, generalmente dará proyectos no óptimos, aunque de buena calidad. Sin embargo, no siempre existe un diseño que lo verifique y cuando existe no es fácil de obtener.

El análisis es la herramienta utilizada por el pro

yectista para saber si un diseño cumplirá con sus funciones.

Durante toda la historia de la ingeniería, muchos esfuerzos fueron dedicados a perfeccionar los métodos de análisis, tratando siempre de mejorar su precisión y confiabilidad. Los motivos son obvios, ya que no se pueden admitir errores al estimar si un diseño funcionará.

Sin embargo, un gran aumento en la precisión del análisis, no producirá mejoras radicales en el proyecto, en cuanto no esté asociado a métodos eficientes de optimización; ya que lo único que permitirá será la disminución de los coeficientes de seguridad.

Pero es a partir de la existencia de modelos matemáticos de los elementos que integran un diseño, y de métodos automáticos de análisis, que se puede pensar en utilizar mecanismos de optimización.

En ingeniería estructural, el método de los elementos finitos proporciona una herramienta eficiente para la optimización. Sin embargo los métodos de optimización no han logrado seguir los avances conseguidos en el análisis, fundamentalmente en lo que respecta a estructuras de gran porte.

En sus comienzos, la optimización estructural numérica, se desarrolló a partir de la aplicación de métodos de programación matemática [2,3]. Alrededor de 1968, quedó claro, sin embargo, que la aplicación de los métodos clásicos era impracticable en la optimización de estructuras de gran porte.

En una tentativa de solucionar dicho problema, nuevos métodos, conocidos como basados en el "criterio de optimalidad", fueron investigados con considerable éxito [4,5,6,7].

Por otra parte, el continuo desarrollo de los métodos de diseño estructural, estimuló el interés en los métodos de análisis orientados hacia el proyecto [8-18].

Estos trabajos reflejan el hecho de que el análisis, en tal caso, debe tener características especiales.

Mientras que en el concepto clásico de análisis estructural, el objetivo primordial es la predicción precisa del

comportamiento de una cierta estructura; cuando el objetivo es proyectar, el análisis debe generar con el menor esfuerzo, una estimación de los valores de respuesta, de modo de guiar una secuencia de modificaciones de diseño.

Este trabajo consiste en la elaboración de un sistema computacional, para la síntesis automática de estructuras de gran porte, mediante el desarrollo, cuando necesario, y la utilización de métodos de análisis y computacionales apropiados.

En el mismo se utiliza un algoritmo de optimiza -
ción, basado en el criterio de optimalidad, desarrollado por Se
genreich, S.A., Zouain, N. y el autor [19]. También se indican
caminos que permitan ampliar la gama de los problemas estructu-
rales considerados.

En ese sentido, se incluye la restricción de pan-
deo, en los elementos tipo "barra", considerándose el momento
de inercia proporcional al cuadrado del area de la sección trans-
versal. Dicha hipótesis es más realista que la de ser lineal, ge-
neralmente considerada en la literatura.

En el capítulo 2 se presenta la formulación espe-
cífica de un problema de optimización estructural, del modo en
que será tratado en el presente trabajo.

El sistema de análisis es descripto en el capítu-
lo 3, y la obtención de las derivadas de respuesta, necesarias
para la fase de optimización es presentada en el capítulo 4.

En el capítulo 5 se ven las características gene-
rales del algoritmo de optimización y su relación con el resto
del sistema, describiéndose en el capítulo 6, los métodos utili-
zados para eliminar restricciones, a fin de facilitar los cálcu-
los necesarios. La organización general del sistema de síntesis
de describe en el capítulo 7.

En los dos últimos capítulos, se presentan los re-
sultados obtenidos en varios ejemplos de aplicación, y las con-
clusiones a que dichos resultados permiten llegar.

2. PRESENTACION DEL PROBLEMA DE SINTESIS ESTRUCTURAL

Se presenta en este trabajo un sistema de proyecto de estructuras óptimas, exponiendo sus fundamentos, organización y mostrando su comportamiento en la resolución de diversos ejemplos.

El proyecto estructural, será considerado como la obtención de una estructura de "costo" mínimo, a partir de una geometría fijada por el proyectista y que satisfaga los criterios funcionales y de seguridad requeridos.

Se entiende como "costo", una función establecida por el proyectista, la que será llamada "Función Objetivo".

Vector de variables de diseño es aquel formado por los parámetros que definen una estructura, y configuración es un valor particular asumido por dicho vector.

Serán llamados "restricciones", los criterios mencionados, que determinan si un diseño es aceptable, y configuración factible a toda aquella que satisfaga las restricciones.

Definiremos entonces el problema de síntesis, expresando que:

- Dada una estructura, modelada mediante elementos finitos y sometida a múltiples estados de carga, se hallará una configuración

$$x \equiv (x_1, x_2 \dots x_m)$$

para la cual la función objetivo

$$P(x)$$

es mínima, verificándose las restricciones sobre las variables, expresadas como

$$x_i^I \leq x_i \leq x_i^S \quad i=1, m \quad (2.1)$$

y las llamadas restricciones de respuesta

$$g_j^I(x) \leq g_j(x) \leq g_j^S(x) \quad j=1, l \quad (2.2)$$

En nuestro caso, las variables de diseño son áreas transversales para los elementos axiales y espesores para los bi dimensionales.

Con respecto a las restricciones de respuesta, $g_i(x)$ pueden ser tensiones equivalentes en los elementos o desplazamientos de los nodos y $g_j^I(x)$, $g_j^S(x)$ son constantes en relación a x , excepto cuando se considera pandeo.

La función objetivo, no será necesariamente expresada en forma explícita, aunque se deberá poder calcular su valor y su gradiente en cada iteración.

En el capítulo 3 se verán las características y li mitaciones de las estructuras que consideramos.

El sistema de síntesis que se presenta, utiliza un optimizador iterativo, para restricciones de respuesta expresadas de la forma

$$c_j(x) \leq 0 \quad j=1,\ell \quad (2.3)$$

debiéndose suministrar en cada iteración el valor de las restricciones, y las derivadas

$$\frac{\partial c_j(x)}{\partial x_i} \quad i=1,m ; j=1,\ell$$

para la configuración respectiva.

Estos datos son calculados por los sistemas de aná lisis y derivación, respectivamente.

Un esquema básico del proceso iterativo de síntesis está esquematizado en la figura 1.

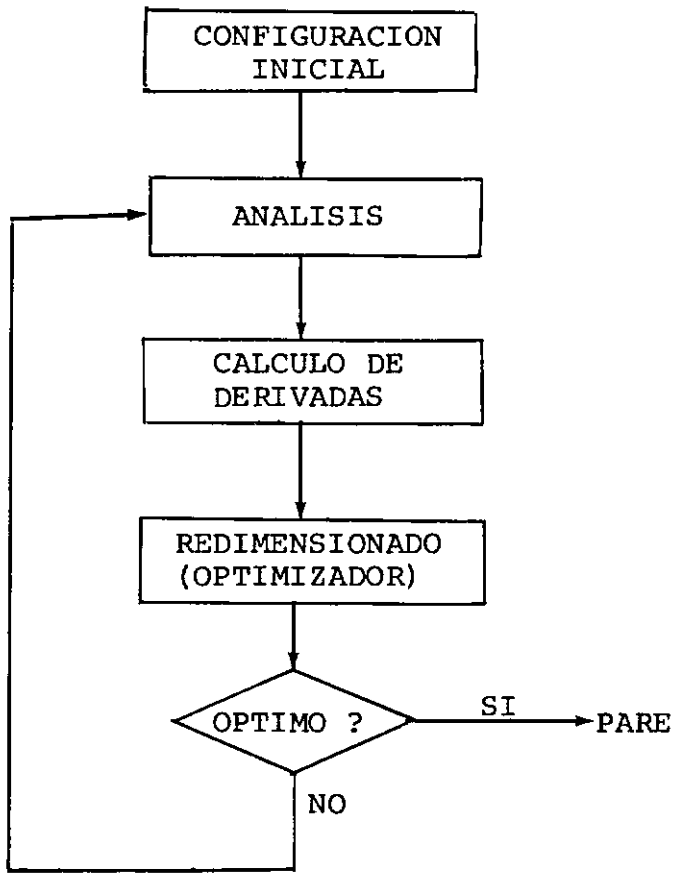


Fig. 1

3. UN SISTEMA DE ANALISIS ESTRUCTURAL ORIENTADO HACIA EL PROYECTO

3.1. Introducción

El algoritmo de optimización que se utilizará exige en cada iteración, que dada una configuración se halle el vector de restricciones correspondiente, y la matriz formada por las derivadas parciales de dichas restricciones, con respecto a las variables de diseño.

Se llamará análisis, a la obtención de dicho vector de restricciones.

Obsérvese que cuando el análisis se realiza a efectos de su utilización en el proyecto automático de estructuras, el mismo debe proveer información cuantitativa sobre el grado en que la estructura satisface los criterios de diseño especificados.

La síntesis estructural exige la realización de un gran número de análisis, los que deben ser realizados de la manera más eficiente posible, a efectos de aumentar la factibilidad económica del método.

Para estos fines, existen fundamentalmente dos caminos no excluyentes a seguir:

- i) Reordenación de los métodos de cálculo utilizados clásicamente. Esta debe ser realizada de tal modo que permita la utilización de elementos invariantes a lo largo del proceso iterativo, tanto para el análisis, como para la derivación de restricciones.
- ii) Utilización de métodos de análisis estructural aproximado [8,11,12,17,18].

En este trabajo se utiliza solamente el primer camino, aunque dejando abierta la posibilidad de incluir futuramente métodos aproximados.

3.2. Características del Problema Estructural

El sistema que se describe, considera estructuras lineales y discretizables mediante la utilización de elementos finitos, siendo su geometría fijada por el proyectista e invariable durante el proceso de síntesis.

Existe la posibilidad de especificar la igualdad de las dimensiones de ciertos elementos, y en ese caso tendríamos un conjunto de elementos determinados por la misma variable de diseño. Se llamará "Grupo de Unión" a uno de tales conjuntos.

La definición de grupos de unión, puede utilizarse a efectos de mantener simetrías en la estructura, pudiendo también ser un medio de disminuir la cantidad de variables de diseño del problema, además de ser muchas veces una necesidad de fabricación.

A efectos de realizar la interconexión con el sistema de optimización, las restricciones de respuesta deberán expresarse de la forma indicada en (2.3).

Las restricciones de tensión serán calculadas como:

$$c_{t_i} = \frac{|\sigma_{eq_i}| - \sigma_{ad_i}}{\sigma_{ad_i}} \quad (3.1)$$

donde:

c_{t_i} = restricción de tensión en el elemento e_i

σ_{eq_i} = tensión equivalente en un punto característico de e_i para el estado tensional calculado, obtenida mediante la utilización de un criterio preestablecido.

$$y \quad \sigma_{ad_i} = \min(\sigma_{m_i}, \sigma_{cr_i}) \quad (3.2)$$

siendo σ_{m_i} = tensión equivalente máxima admitida por el material, pudiendo ser diferente en tracción que en compresión.

σ_{cr_i} = tensión crítica en e_i , por debajo de la cual la configuración de dicho elemento es estable (elementos axiales).

Se definen las restricciones de desplazamiento como:

$$c_{d_j} = \frac{|U_j| - U_{ad_j}}{U_{ad_j}} \quad (3.3)$$

siendo:

c_{d_j} = restricción de desplazamiento en la dirección generalizada j .

U_j = desplazamiento en dicha dirección.

U_{ad_j} = desplazamiento máximo admisible, puede ser diferente según el sentido del mismo.

Obsérvese que estamos utilizando la palabra "restricción" con dos significados diferentes, uno de ellos es el hecho cualitativo y otro es un número o vector que da una cuantificación del mismo.

Esta manera de definir las restricciones, además de compatible con la utilizada por el sistema optimizador, tiene la ventaja que las mismas resultan adimensionadas, siendo que la condición de factibilidad, será

$$-1 \leq c \leq 0 \quad (3.4)$$

De esta manera, las mismas tendrán órdenes de magnitud comparables a pesar de ser de dimensiones diferentes.

Las restricciones sobre las variables, son tratadas en forma diferente, según se verá más adelante.

3.3. Características Elásticas de la Estructura

Veamos sucintamente el desarrollo de la formula-

ción matemática que se utilizará para el análisis estructural. Se empleará el método de análisis matricial de desplazamientos [20].

Consideremos un elemento estructural e_i , llamaremos n_i , al número total de coordenadas generalizadas de los nodos de dicho elemento.

$$u_i \equiv (u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, \dots, u_i^{(n_i)})$$

será el vector de desplazamientos nodales, referido a un sistema local de coordenadas, siendo

$$\epsilon_i \equiv (\epsilon_{x_i}, \epsilon_{y_i}, \epsilon_{xy_i})$$

el vector de deformación cuyas componentes fueron indicadas para el caso plano.

ϵ_i varía para cada punto dentro del elemento considerado.

Suponiendo la linealidad del sistema, se verifican las ecuaciones de compatibilidad

$$\epsilon_i = b_i u_i \quad (3.5)$$

es decir, tomamos como hipótesis que la deformación es tal que verifica (3.5), donde b_i representa la matriz compuesta por las deformaciones ϵ_i debidas a desplazamientos u_i unitarios. Cuando se define el tipo de elemento finito, se asume el valor de b_i , que en general depende del punto considerado dentro del elemento.

Por otra parte, se verificarán las ecuaciones

$$\sigma_i = \chi_i \epsilon_i \quad (3.6)$$

que son representativas de la ley de Hooke, siendo χ_i una matriz que depende de las características del material, y

$$\sigma_i \equiv (\sigma_{x_i}, \sigma_{y_i}, \sigma_{xy_i})$$

el vector de tensiones, representado para el caso bidimensional.

La matriz de rigidez del elemento será [20]

$$k_i = \int_{V_i} b_i^T \chi_i b_i dV_i \quad (3.7)$$

A efectos de determinar las propiedades de la estructura, se debe establecer un sistema de coordenadas común para toda ella. El mismo será llamado, sistema global de coordenadas.

Sea \bar{u}_i el vector de desplazamientos nodales del elemento expresado en dicho sistema, se tiene

$$u_i = \lambda_i \bar{u}_i \quad (3.8)$$

donde λ_i es una matriz de cambio de base.

Llamemos

$$U \equiv (U_1, U_2 \dots U_p)$$

al vector de desplazamientos nodales de la estructura referido a coordenadas globales, en que p es el número total de grados de libertad nodales.

Se verifica entonces

$$\bar{u}_i = A_i U \quad (3.9)$$

donde A_i , es conocida como matriz de compatibilidad nodal, en la cual cada fila está formada por elementos nulos, excepto un único término correspondiente a la unidad, y cuya ubicación identifica el elemento de \bar{u}_i correspondiente al particular elemento de U .

Se puede demostrar entonces, que la matriz de rigidez total de la estructura, se determina por

$$K = \sum_{i=1}^n A_i^T \bar{k}_i A_i \quad (3.10)$$

donde n es el número de elementos de la estructura, y

$$\bar{k}_i = \lambda_i^T k_i \lambda_i \quad (3.11)$$

Si llamamos

$$\psi = \lambda A \quad (3.12)$$

será

$$K = \sum_{i=1}^n \psi_i^T k_i \psi_i \quad (3.13)$$

3.4. Cálculo de los Desplazamientos

Sea

$$F \equiv (F_1, F_2, \dots, F_p)$$

el vector de cargas de la estructura, el mismo se relaciona con U , mediante el sistema

$$F = KU \quad (3.14)$$

Si eliminamos del mismo las ecuaciones correspondientes a los desplazamientos que deben ser nulos, debido a las condiciones de contorno de la estructura, llegamos al siguiente sistema, que se debe resolver:

$$F_R = K_R U_R \quad (3.15)$$

donde el subíndice R indica que las matrices fueron reducidas, según se indicó.

K_R será llamada matriz de rigidez restringida de la estructura.

La numeración de los grados de libertad es realizada asignando los primeros valores a aquellas direcciones cuyo des

plazamiento esta restringido. Para obtener U_R se deberá entonces eliminar de U los primeros pr elementos, donde pr es el número de direcciones generalizadas de desplazamiento restringido.

O sea que

$$U = \tau U_R \quad (3.16)$$

donde

$$\tau = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow \\ pr \end{matrix}$$

\longleftrightarrow
 $p - pr$

Se tomará como hipótesis que los tipos de elementos utilizados son tales que su matriz de rigidez es proporcional a la variable de diseño. Esta es una hipótesis restrictiva que se asume a efectos de facilitar los cálculos, pudiéndose extender el método para elementos que no la verifiquen.

Sea k_i^U la matriz de rigidez del elemento e_i , calculada para un valor unitario de la variable de diseño correspondiente, se verificará que

$$k_i = x_j k_i^U \quad e_i \in G_j \quad (3.17)$$

siendo G_j el grupo de unión definido por la variable x_j .

Si sustituimos esta última igualdad en (3.13) se tiene

$$K = \sum_{j=1}^m x_j \sum_{i \in G_j} \psi_i^T k_i^U \psi_i \quad (3.18)$$

pues ψ_i no depende de x_j , siendo m el número de variables de diseño.

Llamando matriz de rigidez unitaria del grupo G_j a aquella tal que

$$K_j^U = \sum_{i \in G_j} \psi_i^T k_i^U \psi_i \quad (3.19)$$

se verificará:

$$K = \sum_{j=1}^m x_j K_j^U \quad (3.20)$$

Si K_R^U es la matriz obtenida a partir de K_j^U , eliminando los mismas filas y columnas que lo fueron de K para obtener K_R , llegamos a que:

$$K_R = \sum_{j=1}^m x_j K_{Rj}^U \quad (3.21)$$

Esta última relación permite, dada una configuración, obtener la matriz restringida correspondiente, simplemente como combinación lineal de un conjunto de matrices invariantes durante el proceso iterativo. Esto permite reducir considerablemente el esfuerzo computacional requerido.

3.5. Cálculo de las Tensiones

Se elige un punto fijo característico, PC_i , del elemento en el cual se evalúa la tensión, verificandose entonces

$$\sigma_i = \chi_i b_i u_i \quad (3.22)$$

siendo σ_i , b_i evaluados en PC_i .

Sustituyendo (3.8) y (3.9) en esta última se tie-

ne

$$\sigma_i = \chi_i b_i \psi_i U \quad (3.23)$$

y llamando a

$$T_i = \chi_i b_i \psi_i \quad (3.24)$$

matriz de tensión de e_i , se llega a

$$\sigma_i = T_i U \quad (3.24)$$

como PC_i no depende de las variables de diseño, T_i será invariante respecto a las mismas, calculandose una sola vez durante el proceso.

En algunos tipos de elementos, el considerar PC geoméricamente fijo podrá no dar una buena estimación de la tensión máxima. Por ejemplo, en el caso de una viga, sometida a flexión simple será mas conveniente tomar PC en la "fibra" extrema de la sección transversal. En ese caso, la matriz de tensión será proporcional a la distancia de dicha fibra al llamado eje neutro.

3.6. Criterios de Resistencia

Hemos visto que dada una distribución de tensiones en un elemento se debe hallar un número representativo de la misma, al que se llamará tensión equivalente σ_{eq} .

En los elementos que se utilizan en este trabajo la distribución de tensiones es constante, por lo tanto no existe la necesidad de elegir PC .

Para los elementos de barra con extremos articulados, la tensión equivalente se toma

$$\sigma_{eq} = \sigma_x$$

donde la dirección x coincide con el eje del elemento, pudiendo

se considerar entonces materiales, cuya tensión máxima admisible sea diferente en tracción que en compresión.

En los otros casos se utiliza el criterio de Hendy Von Mises, que es

$$\sigma_{eq} = (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2)^{1/2} \quad (3.25)$$

para estado bidimensional de tensiones.

De esta manera, se logra sustituir un vector de tensiones por un número representativo de dicho vector.

La programación fué realizada de modo de permitir la inclusión de otros criterios a ser elegidos por el proyectista.

3.7. Barras de Apoyos Articulados Sometidas a Compresión

Para el caso en que se considere pandeo, en los elementos de barra sometidos a compresión, aparecerá una nueva limitación a las tensiones. Esta limitación está dada por la tensión crítica, anteriormente definida y deducible de la fórmula de Euler.

$$\sigma_{cr_i} = \frac{\pi^2 E_i}{l_i^2} \frac{I_{min_i}}{x_j} \quad ; \quad e_i \in G_j \quad (3.26)$$

donde

E_i = módulo de elasticidad de e_i

l_i = longitud de e_i

I_{min_i} = momento de inercia principal mínimo

x_j = area transversal de los elementos que integran el grupo de unión G_j

y llamando

$$\gamma_i = \frac{\pi^2 E_i}{l_i^2} \quad (3.27)$$

será

$$\sigma_{cr_i} = \frac{\gamma_i I_{min_i}}{x_j} \quad (3.28)$$

Vemos entonces que aparece un nuevo parámetro, el momento mínimo de inercia, que depende de la geometría del perfil utilizado. Debido a que en este caso, las variables de diseño son áreas de secciones transversales, se debe relacionar los momentos de inercia con dichas variables, mediante una función del tipo

$$I_{min_i} = Y_i(x_j) \quad e_i \in x_j$$

En la práctica, utilizando los perfiles normalizados existentes en el mercado, no es posible establecer una relación de este tipo, en forma rigurosa.

En el sistema de síntesis estructural que describimos, se da al proyectista la posibilidad de elegir entre dos expresiones para $Y_i(x_j)$, que son de aplicación en la práctica de la ingeniería.

$$i) Y_i(x_j) = \eta_i x_j \quad e_i \in G_j \quad (3.29)$$

donde η_i es una constante

$$\sigma_{cr_i} \text{ será entonces } \sigma_{cr_i} = \gamma_i \eta_i \quad (3.30)$$

Obsérvese que en este caso la tensión crítica es constante independientemente del área del elemento considerado. Esto implica que todos los cálculos que se realicen, serán similares al caso en que no se considere pandeo, aunque con una tensión admisible que en general será menor que la impuesta por las características del material.

$$ii) Y_i(x_j) = \eta_i x_j^2 \quad (3.31)$$

de donde

$$\sigma_{cr_i} = \gamma_i \eta_i x_j \quad (3.32)$$

O sea que la tensión crítica es lineal con respecto al área de la barra considerada.

La representación gráfica de la tensión admisible definida en (3.2), en función de dicha área, se representa en la figura 2. Sea

$$x_{t_j} = \frac{\sigma_{m_i}}{\gamma_i \eta_i}$$

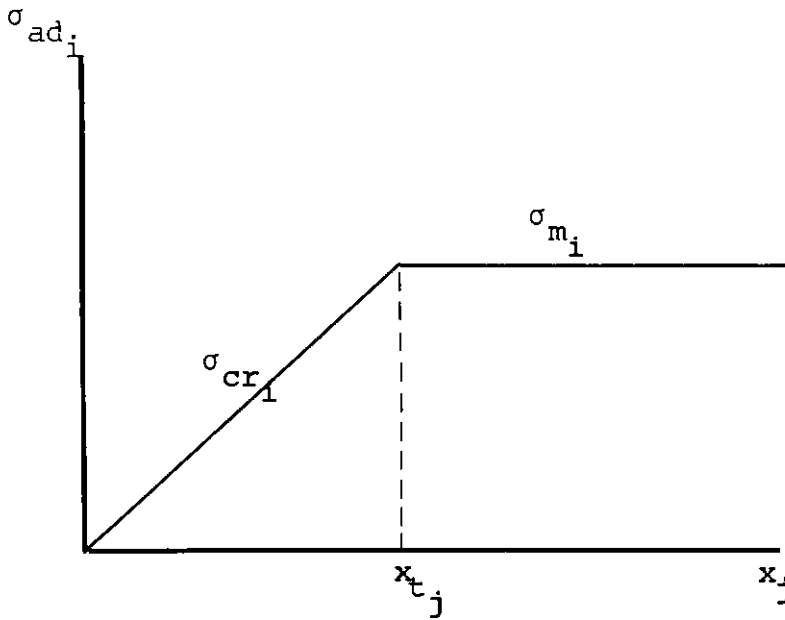


Fig. 2

Para $x_j \leq x_{t_j}$ es $\sigma_{ad_i} = \sigma_{cr_i}$, mientras que para $x_j \geq x_{t_j}$ se verifica $\sigma_{ad_i} = \sigma_{m_i}$. En la práctica, el primer caso es mas común. En el apéndice B se ven criterios prácticos para la elección de $Y(A)$.

3.8. Montaje del Vector de Restricciones

Una vez obtenidas las tensiones equivalentes, las tensiones críticas y los desplazamientos, se calculan todas las restricciones especificadas, según fueron definidas anteriormente.

Sin embargo, no todas las restricciones de respuesta serán consideradas para el redimensionado realizándose un filtrado que elimina aquellas menos críticas o redundantes.

Mas adelante se verán los motivos del filtrado y los criterios seguidos para su realización.

A partir de las restricciones que no fueron eliminadas por dicho filtrado, se monta el vector de restricciones ubicándolas en un cierto orden preestablecido.

3.9. Organización del Sistema de Análisis

El sistema de análisis, se compone de dos bloques, el preprocesador y el analizador, siendo que el primero funciona como un programa separado.

El preprocesador se encarga de calcular todos aquellos elementos invariantes durante el proceso de síntesis, a saber:

- Matrices de rigidez restringidas unitarias, por grupo de unión.
- Matrices de tensión de los elementos.
- Pesos unitarios por grupo de unión, es decir, la suma de los pesos de todos los elementos de un grupo, cuando la variable de diseño correspondiente es igual a la unidad.

Estos elementos son archivados en disco a efectos de su posterior utilización por el sistema.

El preprocesador es activado solamente una vez para una determinada estructura y los datos por el almacenados pue

den ser utilizados varias veces, tanto para optimizar en diferentes condiciones de carga como de restricciones. Además de ahorrar esfuerzos de cálculo, permite disminuir considerablemente el área de memoria necesaria en la etapa de síntesis.

El analizador actúa en cambio, en cada iteración, calculando el vector de restricciones de la configuración obtenida por el sistema de redimensionado.

En esta etapa el programa ha sido implementado para utilizar solamente dos tipos de elementos:

- Elementos axiales de juntas articuladas
- Membranas triangulares

3.9.1. El preprocesador

Para la elaboración del bloque preprocesador, se tomó como base el programa SAMGEN [21]. Este calcula y archiva las matrices de masa y rigidez por grupos de unión para diversos tipos de elementos finitos.

Una de las etapas de este trabajo, consistió entonces, en la introducción del cálculo y archivo de las matrices de tensión.

El preprocesador realiza las siguientes etapas:

- a) Lectura e impresión de datos de entrada.

Para cada grupo de unión ejecuta el siguiente ciclo:

- b) Cálculo de
 - i) ψ_i , definida por la igualdad (3.12)
 - ii) k_i^U siguiendo el procedimiento descrito en la sección 3.2.
 - iii) K_i^U y posteriormente K_{Ri}^U .
- c) Identificación y archivo de los elementos no nulos de K_{Ri}^U .

- d) Cálculo de
 - i) χ_i , definida en la sección 3.3.
 - ii) b_i , también definida en dicha sección.
 - iii) T_i , mediante la igualdad (3.24)
- e) Identificación y archivo de los elementos no nulos de T_i .
- f) Cálculo y almacenamiento de los pesos unitarios por grupo de unión.
- h) En caso en que sea requerido, imprime K_{Ri}^U , T_i y los pesos unitarios.

3.9.2. El Analizador

El analizador propiamente dicho, se encuentra incorporado al sistema general de síntesis.

Puede considerarse que realiza dos funciones; calcula las tensiones y deformaciones de la estructura y verifica su factibilidad, montando el vector de restricciones.

A continuación se describen las operaciones realizadas por el bloque de análisis.

- a) Lee e imprime datos de entrada, solamente en el primer análisis.
- b) Lee de archivos las matrices K_{Ri}^U y calcula K_R , mediante la igualdad (3.21). Durante el primer análisis calcula el ancho de banda de K_R .
- c) Resuelve el sistema (3.15), hallando los desplazamientos nodales. La resolución se realiza mediante la descomposición de Choleski de la matriz del sistema en el producto de dos matrices triangulares, y la posterior resolución sucesiva de los dos sistemas triangularizados obtenidos. Esta resolución sucesiva se repite para cada estado de carga.

- d) Lee de archivos las matrices de tensión T_i y calcula las tensiones, mediante (3.24), para todos los estados de carga.
- e) Calcula las tensiones equivalentes, según la formulación de la sección 3.6.
- f) Calcula todas las restricciones especificadas.
- g) Elige las restricciones que serán consideradas para el redimensionado y realiza el montaje del vector de restricciones. Esto es realizado por el bloque de elección de restricciones.
- h) Imprime los resultados, según requerimientos del usuario.

4. EL SISTEMA DE CALCULO DE DERIVADAS

Este se encarga del cálculo de las derivadas de aquellas restricciones consideradas en la iteración, con respecto a las variables de diseño; y del montaje de la matriz de derivadas, a efectos de su utilización en el redimensionado.

4.1. Derivadas del Vector de Desplazamientos

Derivando con respecto a la variable x_i , ambos miembros del sistema, [1]

$$K_R U_R = F_R$$

se obtiene

$$K_R \frac{\partial U_R}{\partial x_i} + \frac{\partial K_R}{\partial x_i} U_R = \frac{\partial F_R}{\partial x_i}$$

o sea

$$K_R \frac{\partial U_R}{\partial x_i} = \frac{\partial F_R}{\partial x_i} - \frac{\partial K_R}{\partial x_i} U_R \quad (4.1)$$

Si se considera solamente el caso en que las cargas son independientes de las variables de diseño, será

$$\frac{\partial F_R}{\partial x_i} = 0 \quad (4.2)$$

Aceptando la hipótesis expresada en (3.17), se vio que

$$K_R = \sum_{j=1}^m x_j K_{Rj}^U$$

de donde

$$\frac{\partial K_R}{\partial x_i} = K_{Ri}^U \quad (4.3)$$

o sea que resolviendo el sistema

$$K_R \frac{\partial U_R}{\partial x_i} = - K_{Ri}^U U_R \quad (4.4)$$

o el (4.1), en el caso general, se obtiene la derivada del vector de desplazamientos, con respecto a la variable x_i .

Derivando ahora la igualdad (3.3) se obtienen la derivadas de las restricciones de desplazamiento

$$\frac{\partial c_{dj}}{\partial x_i} = \frac{\text{sig}(U_j)}{U_{adj}} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \quad (4.5)$$

4.2. Derivadas de Las Tensiones

Derivando con respecto a x_j , la igualdad (3.24)

$$\sigma_i = T_i \tau U_R$$

se obtiene

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_j} = T_i \tau \frac{\partial U_R}{\partial x_j} + \frac{\partial T_i}{\partial x_j} \tau U_R \quad (4.6)$$

y como se supuso T_i independiente de x , queda que

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_j} = T_i \tau \frac{\partial U_R}{\partial x_j} \quad (4.7)$$

o sea que las derivadas de las tensiones pueden ser calculadas facilmente a partir de las derivadas del vector de desplazamientos.

Con respecto a las derivadas de las tensiones equivalentes, para el caso de elementos de reticulado, se tenía

$$\sigma_{eq} = \sigma_x$$

de donde

$$\frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x_i} \quad (4.8)$$

y para el caso que se toma el criterio de Hencky-Von Mises, derivando (3.25) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{eq_i}}{\partial x_j} = \frac{1}{2\sigma_{eq_i}} & \left[2\sigma_{x_i} \frac{\partial \sigma_{x_i}}{\partial x_j} + 2\sigma_{y_i} \frac{\partial \sigma_{y_i}}{\partial x_j} - \sigma_{x_i} \frac{\partial \sigma_{y_i}}{\partial x_j} - \right. \\ & \left. - \sigma_{y_i} \frac{\partial \sigma_{x_i}}{\partial x_j} + 6\tau_{xy} \frac{\partial \tau_{xy_i}}{\partial x_j} \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

o sea que, si no se considera pandeo será

$$\frac{\partial c_{t_i}}{\partial x_j} = \frac{\text{sig}(\sigma_{eq_i})}{\sigma_{ad_i}} \frac{\partial \sigma_{eq_i}}{\partial x_j} \quad (4.10)$$

4.3. Derivadas de Tensiones Críticas

En la sección 3.7 se vio el tratamiento que damos a las barras comprimidas, en las que se considera pandeo.

Para el caso i) de dicha sección, debido al hecho de la tensión crítica ser constante, la derivada de la restricción de tensión tendrá la misma expresión que en (4.10), aunque en este caso será generalmente

$$\sigma_{ad} = \sigma_{cr}$$

En el caso ii) se obtuvo

$$\sigma_{cr_i} = \gamma_i \eta_i x_j \quad e_i \in G_j$$

teniendo σ_{ad_i} la forma representada en la figura 2.

En la práctica es generalmente

$$x_j < x_{t_j}$$

aunque es posible que en alguna configuración, el área del elemento considerado sea muy grande y por lo tanto

$$\sigma_{ad_i} = \sigma_{m_i}$$

Esto puede suceder en las primeras etapas del proceso, siendo de esperar que el redimensionador tienda a disminuir esa área, llevándola a ser menor que x_{t_j} .

El cálculo de la derivada se realiza siempre como si fuera

$$\sigma_{ad_i} = \sigma_{cr_i} \quad (4.11)$$

con lo cual se obtiene una previsión mas conservadora del valor que asumirá σ_{ad} en la próxima configuración, en el sentido de asegurar la factibilidad de la misma.

Sustituyendo (3.32) en (3.1) se tiene

$$c_{t_i} = \frac{|\sigma_{eq_i}|}{\gamma_i \eta_i x_j} - 1$$

y derivando esa igualdad se obtiene

$$\frac{\partial c_{t_i}}{\partial x_k} = \frac{\text{sig}(\sigma_{eq_i})}{\gamma_i \eta_i x_j} \frac{\partial \sigma_{eq_i}}{\partial x_k} \quad \begin{matrix} \text{para } k \neq j \\ e_i \in G_j \end{matrix} \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial c_{t_i}}{\partial x_j} = \frac{\text{sig}(\sigma_{eq_i})}{\gamma_i \eta_i x_j} \frac{\partial \sigma_{eq_i}}{\partial x_j} - \frac{\partial \sigma_{eq_i}}{\gamma_i \eta_i x_j^2} \quad e_i \in G_j \quad (4.13)$$

4.4. Organización del Sistema de Derivación

Este puede esquematizarse diciendo que para una cierta configuración, calcula la matriz de derivadas, utilizando información suministrada por el sistema de análisis y por el preprocesador.

El bloque de derivación puede considerarse dividido en tres etapas

- i) Cálculo de las derivadas del vector de desplazamientos.
- ii) Derivación de tensiones y tensiones críticas de pandeo.
- iii) Cálculo de las derivadas de aquellas restricciones consideradas y montaje de la matriz de derivadas.

En la primera etapa se realizan las siguientes operaciones

- a) Lectura de K_{Ri}^U en archivo
- b) Cálculo de $K_{Ri}^U U_R$
- c) Resolución del sistema (4.4), obteniéndose $\frac{\partial U_R}{\partial x_i}$.
Para facilitar el cálculo se utiliza la descomposición de Choleski de K_R , obtenida en el análisis.
- d) Se repiten las etapas anteriores para todas las variables de diseño, y posteriormente para todos los estados de carga.
- e) Los resultados son almacenados en archivos, a medida que se completa el área de memoria disponible.

En las dos últimas etapas se procesan las siguientes operaciones:

- a) Lectura de archivos, de las derivadas del vector de desplazamientos con respecto a una cierta cantidad de variables hasta agotar la capacidad de

memoria disponible.

- b) Lectura de matrices T_i y cálculo de las derivadas del vector de tensiones con respecto a aquellas variables consideradas en a).
- c) Cálculo de las derivadas de la tensión equivalente.
- d) Cálculo de las derivadas de la restricción de tensión correspondiente, utilizando (4.12) y (4.13), si se considera pandeo, o (4.10) en caso contra - rio.
- e) Se repiten las tres últimas etapas para todos los elementos cuya restricción de tensión sea considerada a efectos del redimensionado, y luego para todos los estados de carga.
- f) Se leen mas derivadas del vector de desplazamientos, repitiendose el ciclo hasta completar el proceso.
- g) Montaje y archivado de la matriz de derivadas.

5. EL OPTIMIZADOR

El sistema de proyecto de estructuras, utiliza un optimizador que genera una sucesión de diseños factibles, de peso decreciente, que converge al óptimo buscado. Está basado en un método de resolución iterativo, que usa un algoritmo de tipo "criterio de optimalidad", el que incluye variables de desvío para el tratamiento de las restricciones de desigualdad.

Este método se encuentra descripto en [19] siendo tratado aquí en forma condensada, a efectos de conocer su funcionamiento para la interconexión con el sistema.

5.1. El Modelo Matemático

El problema de optimización considerado puede ser planteado de la siguiente manera:

$$\text{Hallar } x \equiv (x_1, x_2, \dots, x_m)$$

$$\text{que minimiza } P(x)$$

y verifica las restricciones sobre las variables

$$x_i^S \geq x_i \geq x_i^I \quad i=1, m \quad (5.1)$$

y las de respuesta, expresadas como

$$c_j(x) \leq 0 \quad j=1, l \quad (5.2)$$

5.2. Obtención del Algoritmo

Se define el vector de variables de desvío

$$z \equiv (z_1, z_2, \dots, z_l)$$

real, de manera que verifique

$$c_j + z_j^2 = 0 \quad j=1, l \quad (5.3)$$

Las restricciones de respuesta pueden ser entonces sustituidas por las condiciones de igualdad

$$c_j^1 = c_j + z_j^2 = 0 \quad j=1,\ell \quad (5.4)$$

Sea la función

$$\phi = P(x) + \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j c_j^1 \quad (5.5)$$

la condición necesaria para un mínimo local está dada por el sistema

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0 \quad i=1,m$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z_j} = 0 \quad j=1,\ell$$

o sea

$$1 + \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\lambda_j}{p_i} \frac{\partial c_j^1}{\partial x_i} = 0 \quad i=1,m \quad (5.6)$$

$$\lambda_j z_j = 0 \quad j=1,\ell \quad (5.7)$$

donde

$$p_i = \frac{\partial P(x)}{\partial x_i} \quad (5.8)$$

siendo que λ_j son parámetros, conocidos como multiplicadores de Lagrange.

Se debe entonces hallar x, z y los parámetros λ que verifiquen la ecuaciones (5.4), (5.6) y (5.7). La resolución directa de dicho sistema es generalmente imposible, por lo cual se trata de definir un algoritmo iterativo que converja a la configuración buscada.

Supongamos que la v -ésima configuración x^v sea fac

tible, o sea que el vector z^v definido de las ecuaciones (5.3) es real. Se define entonces una relación de recurrencia para x y otra para z , del siguiente modo

$$x_i^{v+1} = \left[\alpha + (\alpha-1) \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\lambda_j^v}{p_i} \left(\frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right)^v \right] x_i^v \quad i=1, m \quad (5.9)$$

$$z_i^{v+1} = [1 + (\alpha-1) K \lambda_i] z_i^v \quad j=1, \ell \quad (5.10)$$

Donde α es un parámetro de relajación, menor que la unidad y acotado inferiormente.

Los incrementos conseguidos en esa iteración serán

$$(\Delta x_i)^v = (\alpha-1) \left[1 + \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\lambda_j^v}{p_i} \left(\frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right)^v \right] x_i^v \quad i=1, m \quad (5.11)$$

$$(\Delta z_j)^v = (\alpha-1) K \lambda_j^v z_j^v \quad j=1, \ell \quad (5.12)$$

A efectos de que la configuración siguiente sea también factible, se condiciona:

$$c^{v+1} = 0 \quad (5.13)$$

Tomando una aproximación lineal de las restricciones será

$$(\Delta c_j^1)^v \approx \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right)^v (\Delta x_i)^v + 2 z_j^v (\Delta z_j)^v \quad (5.14)$$

sustituyendo (5.11) y (5.12) se llega a

$$(\Delta c_j^1)^v = (\alpha-1) \left[-\beta_j^v + \sum_{k=1}^{\ell} \lambda_k^v \beta_{kj}^v \right] \quad (5.15)$$

donde

$$\beta_j^v = - \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right)^v x_i^v \quad (5.16)$$

$$\beta_{kj}^v = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial c_k}{\partial x_i} \right)^v \left(\frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right)^v \frac{x_i^v}{p_i} + 2K(z_j^v)^2 \delta_{kj} \quad (5.17)$$

en que $\delta_{kj} = 0 \quad k \neq j$

$$\delta_{kj} = 1 \quad k=j$$

Para que la configuración $v+1$ sea factible, se deberá verificar el sistema

$$\sum_{k=1}^l \lambda_k^v \beta_{kj}^v = \beta_j^v \quad j=1, l \quad (5.18)$$

La resolución del mismo determinará los parámetros λ_k^v , que sustituidos en (5.9) darán la nueva configuración.

Una vez comenzado el proceso iterativo, el algoritmo define los sucesivos valores de z . Debido a la aproximación lineal, el valor de z^v así hallado se apartará cada vez más de aquel definido en (5.3), a medida que aumenta el número de iteraciones. A efectos de mejorar la precisión del método, se redefine z en cada iteración a partir de las ecuaciones (5.3).

5.3. Algunas Observaciones

Es interesante comentar algunas características del algoritmo [19].

- i) La verificación del sistema (5.18) asegura que si una configuración es factible, también lo será la siguiente, dentro de la aproximación lineal utilizada.
- ii) Se puede demostrar que si x^v converge a una cierta configuración x^0 , tal que

$$x_i^0 \neq 0 \quad i=1, m$$

x^0 verifica las condiciones de optimalidad, ecuaciones en (5.3), (5.6) y (5.7).

- iii) Se puede ver, que si x^v está en un entorno de un mínimo relativo, la configuración siguiente estará más "cerca" de aquellas restricciones que son activas en el óptimo y mas "lejos" de aquellas que no lo son.

5.4. Determinación del Parámetro de Relajación

En la igualdad (5.11) se puede ver que Δx es proporcional a $|\alpha-1|$, lo que permite dimensionar el "paso" que va a ser dado en la iteración. En cada iteración se determina α de manera que se cumplan ciertos objetivos.

- i) A efectos de limitar el error producido por la aproximación lineal en las restricciones, se condiciona

$$\|\Delta x^v\| \leq t_x \|x^v\| \quad (5.19)$$

en que $0 < t_x < 1$

de donde, deberá ser

$$|\alpha-1| \leq \frac{t_x}{\left[\sum_{i=1}^m (v_i^v x_i^v)^2 \right]^{1/2}} \quad (5.20)$$

siendo

$$v_i^v = 1 + \sum_{j=1}^l \frac{\lambda_j^v}{p_i} \left(\frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right)^v \quad (5.21)$$

- ii) El sistema (5.18) se puede reescribir como

$$\nabla c_j(x^v) \cdot \Delta x^v = 2K(\alpha-1) \lambda_j^v c_j(x^v) \quad j=1, l$$

o sea que en una aproximación lineal

$$(\Delta c_j)^v = 2K(\alpha-1) \lambda_j^v c_j(x^v) \quad (5.22)$$

Para asegurar la factibilidad de la configuración

siguiente, se condiciona

$$|\Delta c_j|^v \leq t_c |c_j(x^v)| \quad j=1, \ell \quad (5.23)$$

en que $0 < t_c \leq 1$

solamente para aquellos j tal que

$$(\Delta c_j)^v > 0$$

$$c_j(x^v) \leq 0$$

De (5.22) se deduce que en ese caso es

$$\lambda_j^v > 0$$

Sustituyendo (5.22) en (5.23), se obtiene

$$2K(\alpha-1)\lambda_j^v c_j(x^v) \leq -t_c c_j(x^v)$$

de donde, deberá ser

$$|\alpha-1| \leq \frac{t_c}{2K\lambda_j^v} \quad j=1, \ell \quad (5.24)$$

- iii) Se debe establecer una limitación de modo de asegurar que la siguiente configuración verifique las restricciones sobre las variables.

En el caso

$$x_i \geq x_i^I \quad i=1, m$$

deberá ser

$$|\alpha-1| \leq \frac{x_i^v - x_i^I}{v_i^v x_i^v} \quad (5.25)$$

para toda variable que tienda a decrecer, o sea

$$v_i^v x_i^v > 0$$

iv) Para permitir la convergencia del algoritmo, deberá ser $|\alpha-1|$ acotado superiormente, o sea

$$|\alpha-1| \leq d \quad (5.26)$$

Se adoptará el máximo valor de $|\alpha-1|$ que verifique estas cuatro condiciones de modo de obtener la mayor disminución de peso posible.

5.5. Tratamiento de las Restricciones Infactibles

Si en una iteración se llega a una configuración para la cual una o mas restricciones c_h son violadas se quiere que en la siguiente, dichas restricciones vuelvan a ser satisfechas, o sea

$$(\Delta c_h)^v = -c_h^v \quad (5.27)$$

Tomando una aproximación lineal

$$(\Delta c_h)^v \approx \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial c_h}{\partial x_i} \right)^v (\Delta x_i)^v$$

o sea

$$(\Delta c_h)^v \approx (\alpha-1) \left[\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial c_h}{\partial x_i} \right)^v x_i^v + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{\ell} \left(\frac{\partial c_h}{\partial x_i} \right)^v \left(\frac{\partial c_k}{\partial x_i} \right)^v \frac{x_i^v \lambda_k^v}{p_i^v} \right]$$

y sustituyendo en (5.27)

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{\ell} \left(\frac{\partial c_h}{\partial x_i} \right)^v \left(\frac{\partial c_k}{\partial x_i} \right)^v \frac{x_i^v}{p_i^v} \lambda_k^v = -\frac{1}{\alpha-1} c_h^v + \beta_h^v \quad (5.28)$$

Por lo tanto, para todos aquellos h que indiquen una restricción violada, se deberá sustituir la h -ésima ecuación en el sistema (5.18) por esta última.

La ecuación (5.28) depende de α , siendo que dicho parámetro es determinado posteriormente a la resolución del sis

tema. El procedimiento utilizado es incluir en dicha ecuación el valor asumido por α en la iteración anterior.

5.6. Criterios de Terminación

Todo esquema iterativo debe utilizar criterios numéricos que indiquen si se ha llegado a los objetivos buscados, a efectos de terminar el proceso.

Uno de los criterios utilizados en este trabajo se basa en la condición de optimalidad de Kuhn-Tucker [19]. Esta se puede expresar diciendo que es condición necesaria de mínimo relativo, que se verifique

$$v_i = 0 \quad \text{si} \quad x_i^S > x_i > x_i^I \quad (5.29)$$

$$v_i \geq 0 \quad \text{si} \quad x_i = x_i^I \quad (5.30)$$

$$v_i \leq 0 \quad \text{si} \quad x_i = x_i^S \quad (5.31)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad \text{si} \quad c_j(x) = 0 \quad (5.32)$$

$$\lambda_j = 0 \quad \text{si} \quad c_j(x) < 0 \quad (5.33)$$

El proceso se dará por terminado cuando se verifique

$$|v_i| \leq \theta \quad \text{si} \quad x_i^S > x_i > x_i^I \quad (5.34)$$

$$v_i \geq 0 \quad \text{si} \quad x_i = x_i^I \quad (5.35)$$

$$v_i \leq 0 \quad \text{si} \quad x_i = x_i^S \quad (5.36)$$

$$\frac{\lambda_j^v}{S} \geq -\theta \quad \text{si} \quad |c_j(x^v)| \leq \theta_c \quad (5.37)$$

$$\left| \frac{\lambda_j}{S} \right| \leq \theta \quad \text{si} \quad c_j(x^v) \leq -\theta_c \quad (5.38)$$

siendo $S = \max(\lambda_j^v; j=1, \ell)$.

Los parámetros θ y θ_c son elegidos por el proyectista, debiendo ser menores al aumentar la precisión requerida en la determinación del óptimo.

Otro criterio podría ser, considerar terminado el proceso cuando la caída total de peso en las últimas N iteraciones sea menor que un cierto valor especificado.

También podría limitarse el número de iteraciones.

Estos dos últimos métodos, aunque no aseguran la verificación de las condiciones de optimalidad, son de utilidad en gran cantidad de problemas en los que llega un momento en que el esfuerzo computacional de seguir iterando, no compensa la disminución de peso que se obtendría.

5.7. Restricciones sobre las Variables de Diseño

A efectos de no aumentar el tamaño del sistema (5.18), se da a las restricciones sobre las variables de proyecto un tratamiento diferente que a las de respuesta.

Este procedimiento, utilizado por Segenreich S.A. [22], puede ser adoptado debido a que, cuando una variable llega al mínimo durante el proceso iterativo, generalmente es mínima en el óptimo.

En el parágrafo (5.4) se vió que el parámetro α es calculado de modo que las variables lleguen a lo sumo a su valor mínimo o máximo. Cuando esto sucede con alguna variable, esta es fijada en dicho valor, es decir, deja de ser variable de diseño, y se prosigue iterando hasta que se verifique el criterio de terminación adoptado.

Posteriormente se pueden seguir las siguientes alternativas:

- i) Aceptar la configuración obtenida como resultado del problema.
- ii) Verificar si se cumple el criterio de Kuhn-Tucker, cuando se incluyen todas las variables. Si el mismo

se cumple, excepto para algunas de las variables que fueron fijadas, estas son liberadas y se continúa el proceso.

- iii) Se realiza una iteración, liberando todas las variables. Si todas las variables que se presumía que eran mínimas en el óptimo, tienden a disminuir, se puede aceptar que las mismas son efectivamente mínimas. En caso contrario se continúa el proceso.

6. REDUCCION DE LA CANTIDAD DE RESTRICCIONES

El establecimiento de problemas de síntesis estructural, generalmente involucra un gran número de restricciones, tanto de respuesta como sobre las variables.

La gran cantidad de restricciones de respuesta, se debe fundamentalmente a que es necesario limitar la tensión en to dos los elementos, en varios estados de carga.

A efectos de reducir el número de restricciones con sideradas por el optimizador, se realizan diversos filtrados, que eliminan aquellas menos críticas o redundantes.

Esto facilitará considerablemente la resolución del problema de optimización, disminuyendo los esfuerzos computacionales requeridos, pues se reduce el cálculo de gradientes de las restricciones y el tamaño del sistema (5.18) del cual se obtie - nen los parámetros λ_i .

Se describen a continuación algunos criterios de filtrado, los que pueden ser utilizados separadamente o en va - rias combinaciones.

6.1. Filtrado por Razón de Respuesta

Sea una restricción $c_i(x)$, llamamos "razón de res - puesta", a

$$R_i(x) = 1 - |c_i(x)| \quad (6.1)$$

Obsérvese que p.e. en el caso de restricciones de tensión, será

$$R_i(x) = \frac{\sigma_i(x)}{\sigma_{ad_i}(x)}$$

o sea que expresa la razón entre la tensión en esa configuración y la máxima admisible.

A medida que $R(x)$ se acerca a la unidad, la restricci

ción correspondiente se vuelve mas crítica.

Este método de filtrado, utilizado por Schmit [17] consiste en eliminar todas aquellas restricciones cuya razón de respuesta sea

$$R_i(x) < RC_i \quad (6.2)$$

RC_i es llamada "razón de corte", pudiendo ser definida de diferentes maneras

i) Constante durante todo el proceso

$$ii) RC_i = f_i \times RMAX \quad (6.3)$$

donde f_i es un factor constante y RMAX es la máxima razón de respuesta en la última configuración.

iii) Se mantiene como definición de RC_i , la dada por (6.3) pero tomando

$$f_i = f_i(v) \quad (6.4)$$

siendo v el número de la iteración que se va a realizar.

La razón de corte, también depende del tipo de restricción de que se trate, siendo aconsejable tomar valores menores para las de desplazamiento, pues las primeras son más sensibles a la redistribución de material durante una etapa del proceso iterativo.

En este trabajo, para las restricciones de tensión se tomó

$$RC = .1 \times 1.2^{(v-1)} \times RMAX \quad (6.5)$$

y para las de desplazamiento

$$RC = .1 \times 1.2^{(v-1)} \times RMAX + .2 \quad (6.6)$$

siendo que en ambos casos se especifica un límite superior a RC,

dado por

$$RC \leq .6$$

6.2. Regionalización

Otro método para reducir el número de restricciones, fue llamado "regionalización", en la ref. [23].

El mismo consiste en dividir la estructura en regiones, y tomar solamente aquella restricción mas crítica en cada región para cada estado de carga. Pueden definirse regiones diferentes, según se trate de restricciones de tensión o de desplazamiento.

Obsérvese que la regionalización toma como hipótesis que los cambios en el diseño, durante una configuración, no serán tan drásticos como para alterar la ubicación de la restricción mas crítica en una región.

Un caso particular de la regionalización, es tomar regiones definidas por los grupos de unión, para el caso de tensiones. Cuando hay elementos de diferente tipo, en un mismo grupo, es conveniente tomar la tensión más crítica para cada tipo de elemento.

Para las restricciones de desplazamiento, es conveniente que cada región contenga deformaciones según direcciones generalizadas paralelas.

6.3. Filtrado por Estado de Carga

Este consiste en tomar para cada elemento, dirección o región aquella restricción más crítica entre las de todos los estados de carga. Este filtrado puede no ser aplicable en casos en que los estados de carga sean muy diferentes entre sí.

A efectos de aumentar la seguridad del mismo, se puede tomar no solo la mayor restricción, sino también aquellas que pertenezcan a un cierto entorno de la misma.

6.4. Consideraciones sobre la Eliminación de Restricciones

En estructuras de gran porte es generalmente imprescindible la disminución del número de restricciones, en caso contrario el tiempo de computación sería muy grande y la capacidad de memoria necesaria podría incluso superar las posibilidades de máquinas de gran tamaño.

Debemos considerar, sin embargo, que el filtrado trae aparejado el peligro que durante una iteración, alguna restricción que no fué considerada por el optimizador pase a ser infactible, lo cual haría necesario la recuperación de esa iteración, con el consiguiente consumo de tiempo de computación.

En el caso de las restricciones de tensión, éstas dependen fuertemente de la variable de diseño que determina las dimensiones del elemento que se considera. La utilización de un filtrado que incluya el primer tipo descripto, podrá traer aparejada la eliminación de las tensiones en todos los elementos pertenecientes a un cierto grupo de unión, con lo cual la variable correspondiente disminuirá mucho en la iteración, generando se restricciones infactibles. Esto puede ser evitado, limitando en forma apropiada el incremento de las variables.

Vemos entonces que existe una interrelación entre los filtrados utilizados y los parámetros que determinan la elección de α , según fue visto en la sección 5.4, debiéndose elegir una combinación de estos factores, que determine un proceso lo más eficiente posible.

7. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA DE SINTESIS ESTRUCTURAL

En este capítulo se verá la organización general del sistema de síntesis estructural que presentamos. Serán descritas también algunas características importantes del mismo y ciertas soluciones computacionales que fueron adoptadas.

7.1. Algunas Características Funcionales

- i) El procesamiento de un problema es absolutamente automático, es decir que dada una configuración inicial por el proyectista, se realizarán iteraciones hasta que se verifique el criterio de terminación especificado.

Esto implica que si en alguna iteración se llega a una configuración infactible, se deberá repetir la etapa alterando los parámetros necesarios para obtener una configuración factible. Esto es realizado por el bloque de recuperación.

- ii) El sistema tiene capacidad de reinicio. Es decir que después de procesado un problema, el proyectista puede alterar los parámetros que considere necesarios y especificar la continuación de las iteraciones ya obtenidas.

A estos efectos es necesario conservar en archivos, los datos de cada iteración necesarios para el reinicio.

- iii) Para una cierta geometría estructural, es posible la resolución de todos los problemas que se requiera, sin necesidad de reactivar el preprocesador.

7.2. Organización

El bloque de "Control del Proceso de Síntesis", es el que toma todas aquellas decisiones lógicas, necesarias para

determinar el flujo del proceso.

La organización básica del sistema, se encuentra representada graficamente en la figura 3, ejecutándose las siguientes etapas.

- a) Entrada de datos al preprocesador y al bloque de control.
- b) Se activa el preprocesador, que calcula y almacena aquellos elementos invariantes durante el proceso.
- c) Se inicia el proceso iterativo, a partir de una configuración inicial factible, introducida por el proyectista.
- d) El bloque analizador es activado, realizando el análisis, mediante la utilización de datos calculados por el preprocesador.
- e) Si alguna restricción fué violada en más que una tolerancia admitida, se activa el bloque de recuperación, obteniéndose una configuración factible. Más adelante se describirá el funcionamiento de dicho bloque.
- f) El analizador activa el bloque de elección de restricciones y luego realiza el montaje del vector de restricciones consideradas.
- g) Derivación de las restricciones y montaje de la matriz de derivadas.
- h) Se activa el optimizador, que calcula una nueva configuración.
- i) El bloque de variables fijas, determinará estas, de acuerdo a criterios vistos en la sección 5.7.
- j) Se verifica el criterio de terminación elegido. Como resultado de dicha verificación pueden tomarse las siguientes decisiones:
 - i) Continuar el proceso, en la etapa d)

- ii) Liberar alguna variable que había sido fijada y continuar iterando.
- iii) Dar por terminado el proceso.

7.3. El Bloque de Recuperación

En los ejemplos procesados, se llegó a configuraciones infactibles, aunque generalmente en grado ínfimo. En los únicos casos en que se llegó a altos grados de infactibilidad, fué mediante la violación de restricciones que no habían sido incluidas entre las consideradas por el optimizador. En esos casos se recupera la iteración, lo que consiste simplemente en repetir ésta, incluyendo ahora tales restricciones.

Las operaciones que se realizan son:

- a) Se identifica aquellas restricciones que fueron violadas y no habían sido considerados en la iteración.
- b) Se agregan al vector de restricciones correspondiente a la configuración de partida x^v .
- c) Se calculan las derivadas de aquellas restricciones identificadas en a), mediante la utilización de las derivadas del vector de desplazamientos de x^v , ya calculadas.
- d) Se agrega a la matriz de derivadas, los elementos correspondientes a tales restricciones.
- e) Se activa el redimensionado, obteniéndose una nueva configuración.

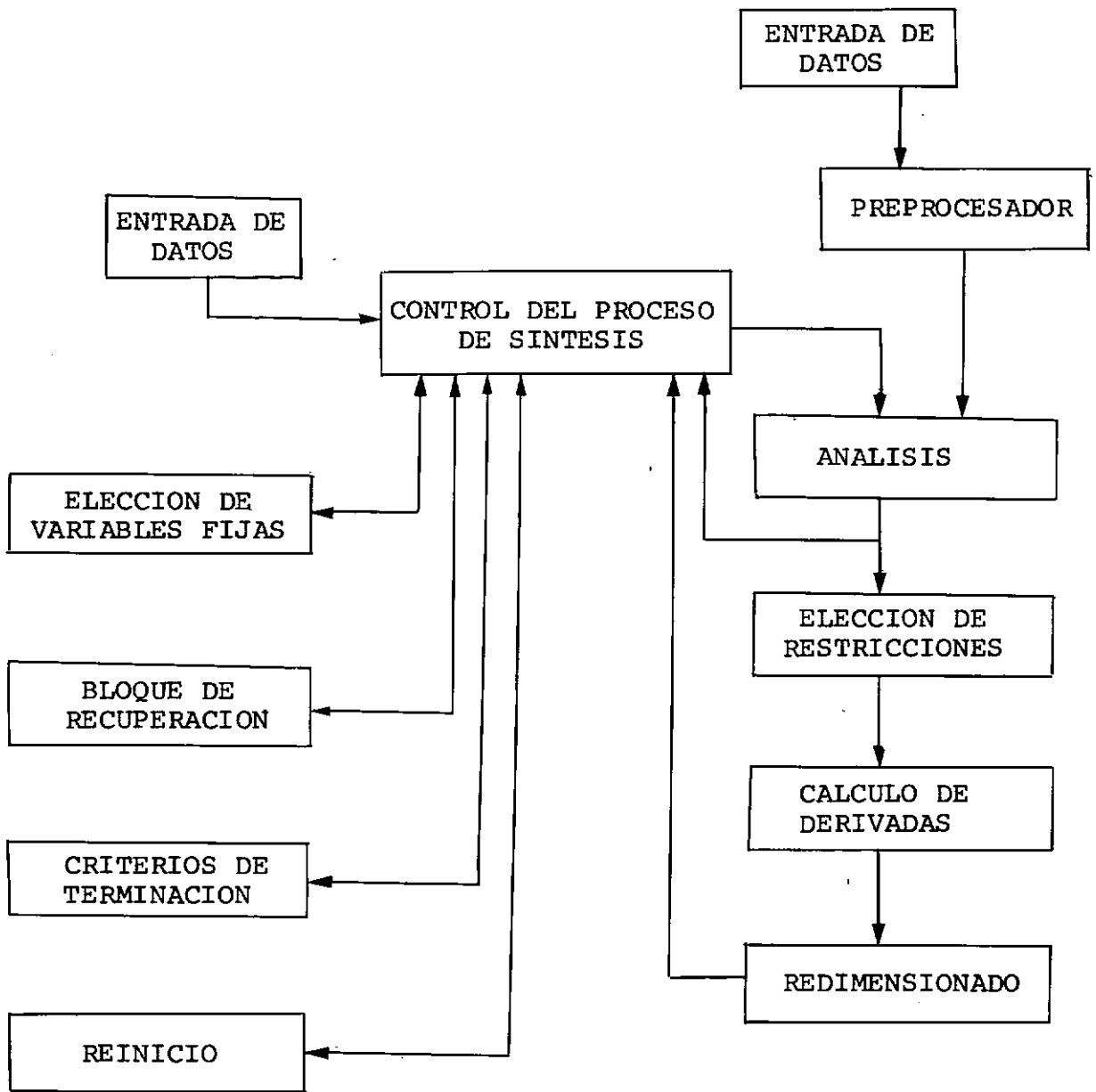


Fig. 3 - Organización del sistema

8. EJEMPLOS DE APLICACION

En este capítulo se describe el comportamiento del sistema en la resolución de diversos ejemplos estructurales, en los que se minimiza el peso de la estructura.

La eficacia del método utilizado es evaluada mediante la comparación con soluciones conocidas de la literatura.

En la Tabla 1 se indican las principales características de los problemas tratados.

Problema	1A	1B	1C	1D	2	3A	3B	4
Variables	10	10	10	10	21	16	16	105
Elem. Axiales	10	10	10	10	31	72	72	200
Elem. Triangulares	-	-	-	-	10	-	-	-
Estados de Carga	1	1	1	1	2	2	2	3
Rest. de Tensión	x	x	x	x	x	x	x	x
Rest. de Desplaz.		x		x	x	x	x	x
Pandeo			x	x			x	
Variab. Mínimas	x	x	x	x	x	x	x	x

Tabla 1. Principales Características de los Ejemplos Tratados.

Los problemas 1A y 1B se encuentran tratados en trabajos de SCHMIT L.A. y MIURA H. [17] y de RIZZI P. [6], y el 3A en el primero de dichos trabajos.

El problema 4 se encuentra en un trabajo de VENKAYYA V.B., KHOT N.S. y REDDY V.S. [24].

El ejemplo 2 no se encuentra en la literatura, siendo incluido a efectos de ver el comportamiento del sistema en casos en que se consideran sistemas con elementos de membrana triangular.

En los problemas 1C, 1D y 3B fueron consideradas restricciones de pandeo, suponiéndose que el momento de inercia mínimo verifica (3.31). No fueron encontrados en la literatura ejemplos con un tratamiento similar, a efectos comparativos.

En el trabajo de Schmit L.A. y Miura H., se presenta el ACCESS I, un sistema de síntesis estructural que incluye conceptos de aproximación para disminuir el número de análisis completos.

Dicho sistema utiliza dos algoritmos diferentes de optimización, a saber

- i) CONMIN - Basado en el método de las direcciones factibles modificado, desarrollado por VANDERPLATS G. N. [3].
- ii) NEWSUMT - Es una secuencia de minimizaciones irrestrictas, basadas en la formulación de la función de penalidad extendida [25]. Dichas minimizaciones son resueltas mediante una modificación del método de NEWTON [26].

P.RIZZI utiliza un algoritmo basado en el criterio de optimalidad, que exige el conocimiento de las restricciones que serán activas en el óptimo. Para desechar restricciones no activas, utiliza un procedimiento basado en el método iterativo de Gauss-Siedell para resolución de sistemas lineales.

En la ref. [24], uno de los primeros trabajos en utilizar criterios de optimalidad, se utiliza un procedimiento iterativo en el cual el diseño para el próximo ciclo está determinado por la distribución de energía de deformación en la presente configuración.

En la evaluación de los diferentes métodos, interesa comparar los pesos obtenidos y el esfuerzo de cálculo requerido en la resolución de los problemas, así como la simplicidad y generalidad de los métodos utilizados.

Debido a la diversidad de computadores empleados, entendemos que el método más eficaz para evaluar la magnitud de los cálculos necesarios, es considerar el número de iteraciones que fue necesario para cada problema, conjuntamente con una estimación de las operaciones necesarias en cada método, por iteración.

Al considerar el número de análisis, en el trabajo

de Schmit y Miura, debe recordarse que el mismo fue disminuido mediante la utilización de métodos aproximados, siendo que al realizarse el conteo del número de análisis no se incluyen los análisis aproximados.

Debe recordarse que el número de análisis es mayor, en una unidad, que el de iteraciones. Esto se debe a que, posteriormente a la última iteración se realiza un análisis, para verificar la factibilidad del diseño final.

8.1. Parámetros de Diseño

En el desarrollo de este trabajo, se utilizaron diversos parámetros que definen el proceso de síntesis, influyendo en su velocidad, precisión y seguridad.

Todos los ejemplos que se presentan, fueron procesados asignando el mismo conjunto de valores a dichos parámetros. El conjunto de parámetros puede ser representado por el vector $VP \equiv (K, t_x, t_c, \delta^I, \delta^S, d, \theta, \theta_c)$.

Parámetro K

El mismo fue definido en (5.10). A efectos de que dicha ecuación sea dimensionalmente correcta, su valor es elegido en cada iteración, tomando

$$K = \frac{K_o}{P(x^v)} \quad (8.1)$$

donde

$$K_o = 1.5$$

La elección de dicho valor se justifica en [19]. Se ha observado que la velocidad de convergencia del algoritmo depende de K, aunque es poco sensible a variaciones en su valor.

Tolerancia en la Variación de $x: t_x$

Definido en (5.19), el mismo determina el valor má

ximo permitido para el módulo del paso, en cada iteración.

El valor adoptado es:

$$t_x = 0.3$$

Tolerancia en la Variación de las Restricciones: t_c

Dicho parámetro, definido en (5.23), es utilizado para permitir el mayor paso posible, sin salir de la región factible.

Para cada restricción considerada, el valor de t_c puede tomar tres valores diferentes, según el valor de su razón de respuesta para la configuración de partida.

- i) $R_j(x^v) \leq 0.95$; se toma $t_c = 0.60$
- ii) $0.998 \geq R_j(x^v) > 0.95$; se toma $t_c = 1.00$
- iii) $1.00 > R_j(x^v) > 0.998$

se calcula t_c , según:

$$t_c = 1 - 0.002/c_j(x^v) \quad (8.2)$$

Sustituyendo (8.2) en (5.23) se ve que

$$c_j(x^{v+1}) \leq 0.002$$

a menos de las aproximaciones lineales involucradas. De esta manera se consigue un aumento en la velocidad del proceso, a costa de permitir pequeñas infactibilidades.

Restricciones sobre las Variables de Diseño

En la sección (5.4) se vio que el parámetro de relajación α se define de modo de permitir que una variable llegue a la suma a su valor mínimo. Posteriormente las variables que llegaran al mínimo, son fijadas en dicho valor.

La utilización de este procedimiento, permitiría

que en cada iteración llegue solamente una variable a su valor mínimo. En problemas en que muchas de las variables son mínimas en el óptimo, sería necesario entonces, la realización de un gran número de iteraciones, lo que debe ser evitado.

A estos efectos, se realiza el siguiente procedimiento alternativo:

i) Se define $\underline{\alpha}$ de modo que

$$x_i^{v+1} \geq \delta^I x_i^I \quad i=1,m$$

$$\text{donde } 0 < \delta^I \leq 1$$

o sea que, en lugar de la desigualdad (5.25), se debe imponer:

$$|\alpha-1| \leq \frac{x_i^v - \delta^I x_i^I}{v_i^v x_i^v}$$

ii) Posteriormente al redimensionado, en lugar del procedimiento indicado en la sección (5.7), son fijadas en su valor mínimo todas aquellas variables que están dentro de una banda en torno de x_i^I , definida por: $\delta^I x_i^I \leq x_i^{v+1} \leq \delta^S x_i^I$ (8.3)
donde $\delta^S \geq 1$

De esta manera se permite que varias variables lleguen al valor mínimo en una iteración, aunque aumentando el riesgo de fijar en el valor mínimo, variables que no lo son en el óptimo.

En los ejemplos, se tomó:

$$\delta^I = 0.8$$

$$\delta^S = 1.15$$

Acotación del Parámetro de Relajación

El parámetro \underline{d} , definido en (5.26) se toma

$$d = 2.5$$

Con menores valores de \underline{d} , aumenta la precisión en la resolución del problema, pero el proceso resulta más lento en las últimas etapas.

Criterio de Terminación

A los efectos de verificar el criterio expresado en las desigualdades (5.34) a (5.38) se toma

$$\theta = 0.07$$

$$\theta_c = 0.02$$

8.2. Reticulado Plano de 10 Elementos (PROBLEMA 1)

Esta estructura da lugar a cuatro problemas, en los que se consideran diferentes tipos de restricciones

Descripción:

- La geometría está representada en la Fig. 4
- 10 elementos
- 10 variables de diseño
- 8 grados de libertad independientes
- Se condiciona desplazamientos nulos en los nodos 5 y 6, en ambas direcciones.
- Módulo de elasticidad - $10 \times 10^6 \text{ psi}$
- Peso específico - 0.10 lb/in^3
- 1 Estado de carga
- 100 lb actuando en dirección de las y negativas en los nodos 2 y 4.

8.2.1. Restricciones de Tensión (PROBLEMA 1A)

En el problema 1A, se consideran las siguientes res_

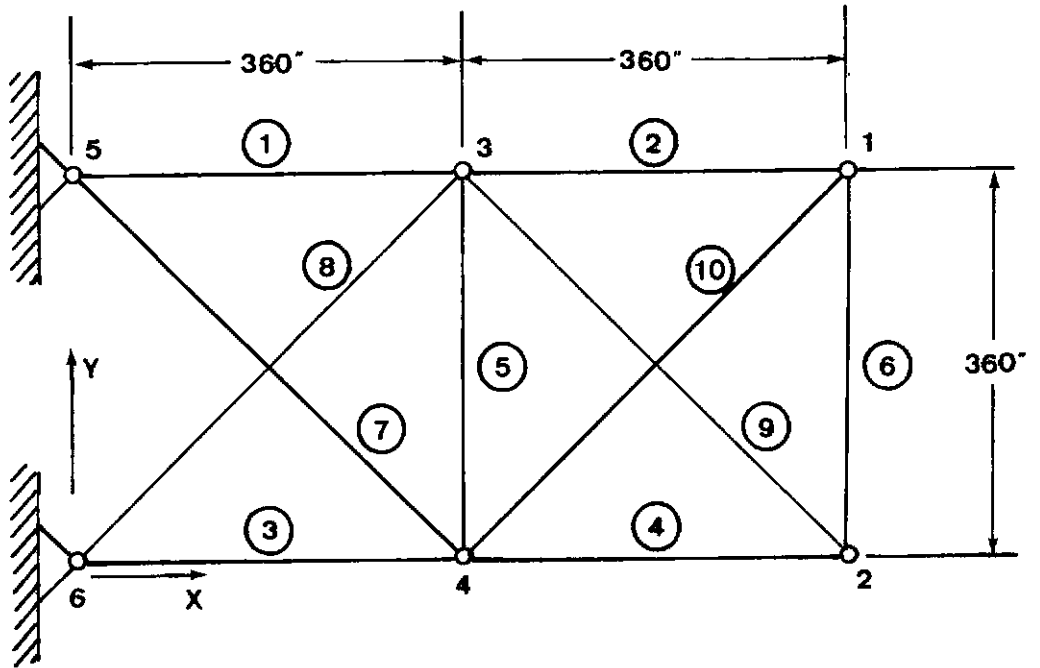


Fig. 4 - Reticulado plano de 10 elementos (Problema 1)

tricciones

- Tensión máxima en todos los elementos - 25,000psi
- Límite inferior para todas las variables - 0.10in²

La configuración inicial es

$$x_i = 10 \text{ in}^2 \quad i=1,10$$

Resultados:

Peso inicial - 4196.40 lb

Peso final - 1593.85 lb

Número de iteraciones - 10

La configuración obtenida se presenta en la Tabla 2 conjuntamente con las de Schmit y Miura y Rizzi. En la Tabla 3 se indican los pesos resultantes de cada iteración, los que están graficados en la Fig. 5.

ELEMENTO Nº	Areas Transversales(in ²)		
	ACCESS I (NEWSUMT)	RIZZI	PRESENTE
1	7.938	7.9379	7.939
2	0.100	0.1000	0.100
3	8.062	8.0621	8.061
4	3.938	3.9379	3.960
5	0.100	0.1000	0.100
6	0.100	0.1000	0.100
7	5.745	5.7447	5.742
8	5.569	5.5690	5.569
9	5.569	5.5690	5.569
10	0.100	0.1000	0.100
Peso Final(lb)	1593.23	1593.18	1593.85
Análisis Realizados	16	16	11

Tabla 2. Diseños Finales (Problema 1A)

El conjunto de restricciones activas en el diseño final está formado por:

- Variables mínimas en los elementos 2,5,6 y 10

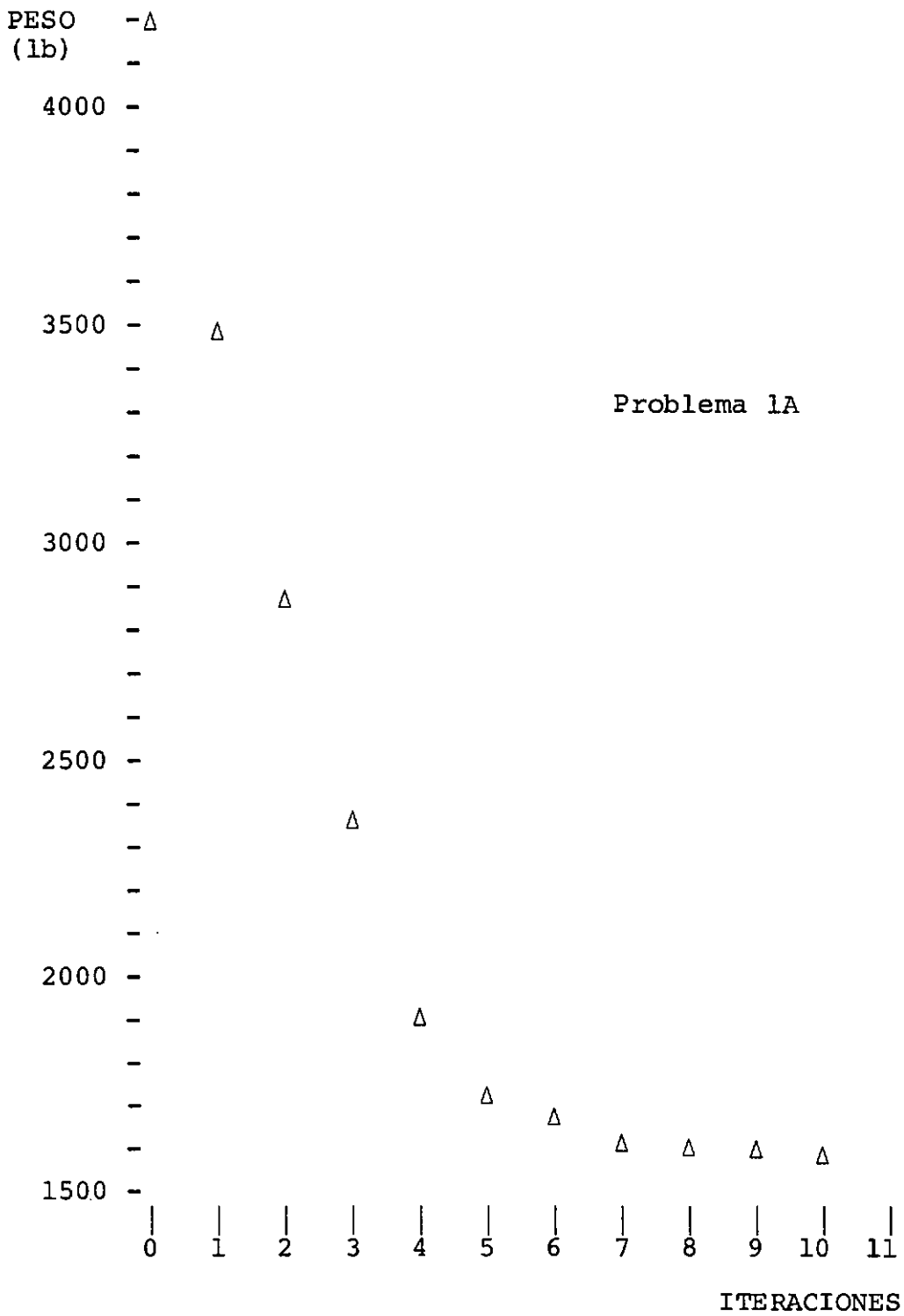


Fig. 5 - Histograma de pesos

- Tensión máxima en los elementos 1,3,4,7,8 y 9

Obsérvese que el número de restricciones activas es igual al de variables, siendo que cada elemento llegó al mínimo o está cargado al máximo.

ITERACION	PESO(lb)	ITERACION	PESO(lb)	ITERACION	PESO(lb)
INICIAL	4196.40	4	1916.49	8	1601.41
1	3474.00	5	1791.92	9	1596.34
2	2868.35	6	1672.71	10	1593.85
3	2356.23	7	1611.31	-	-

Tabla 3. Histograma de pesos (Problema 1A)

8.2.2. Restricciones de Tensión y Desplazamiento (PROBLEMA 1B)

En el problema 1B, las restricciones son:

- Tensión máxima en todos los elementos - 25.000psi
- Desplazamiento máximo en los nodos 1,2,3 y 4 en dirección de las y, en ambos sentidos - 2.00in
- Límite inferior para todas las variables - 0.10in²

La configuración inicial es

$$x_i = 30 \text{ in}^2 \quad i=1,10$$

Resultados:

Peso inicial - 12589.46 lb

Peso final - 5108.59 lb

Número de iteraciones - 11

En las Tablas 4 y 5 se describe la configuración obtenida y los histogramas de peso, conjuntamente con los resultados de la literatura. Dichos histogramas se encuentran graficados en la Fig. 6.

En el diseño final, resultaron activas las siguientes restricciones:

- Variables mínimas en los elementos 2,5 y 6
- Desplazamientos máximos en los nodos 1 y 2

ELEMENTO Nº	Áreas Transversales (in ²)			
	ACCESS I (NEWSUMT)	ACCESS I (CONMIN)	RIZZI	PRESENTE
1	30.23	30.57	30.731	30.360
2	0.179	0.369	0.100	0.100
3	23.940	23.97	23.934	25.260
4	13.480	14.73	14.733	15.040
5	0.100	0.100	0.100	0.100
6	0.180	0.364	0.100	0.100
7	8.565	8.547	8.541	8.846
8	21.950	21.11	20.954	19.930
9	21.190	20.77	20.836	21.250
10	0.241	0.320	0.100	0.143
Peso Final(lb)	5096.7	5107.3	5076.76	5108.59
Análisis Realizados	13	14	12	12

Tabla 4. Diseños Finales (Problema 1B)

ITERACION	Peso (lb)		
	ACCESS I (NEWSUMT)	ACCESS I (CONMIN)	PRESENTE
INICIAL	12589.46	12589.46	12589.46
1	7853.1	6234.1	9324.3
2	6650.7	5835.1	6916.9
3	6161.4	5771.9	6254.5
4	5892.6	5657.0	5812.7
5	5656.4	5541.4	5681.8
6	5427.4	5416.3	5429.5
7	5291.3	5281.1	5334.6
8	5154.2	5158.4	5209.6
9	5107.6	5133.9	5155.7
10	5096.7	5124.8	5151.9
11	5096.7	5116.7	5108.6
12	5096.7	5111.7	-
13	-	5107.3	

Tabla 5. Histograma de Pesos (Problema 1B)

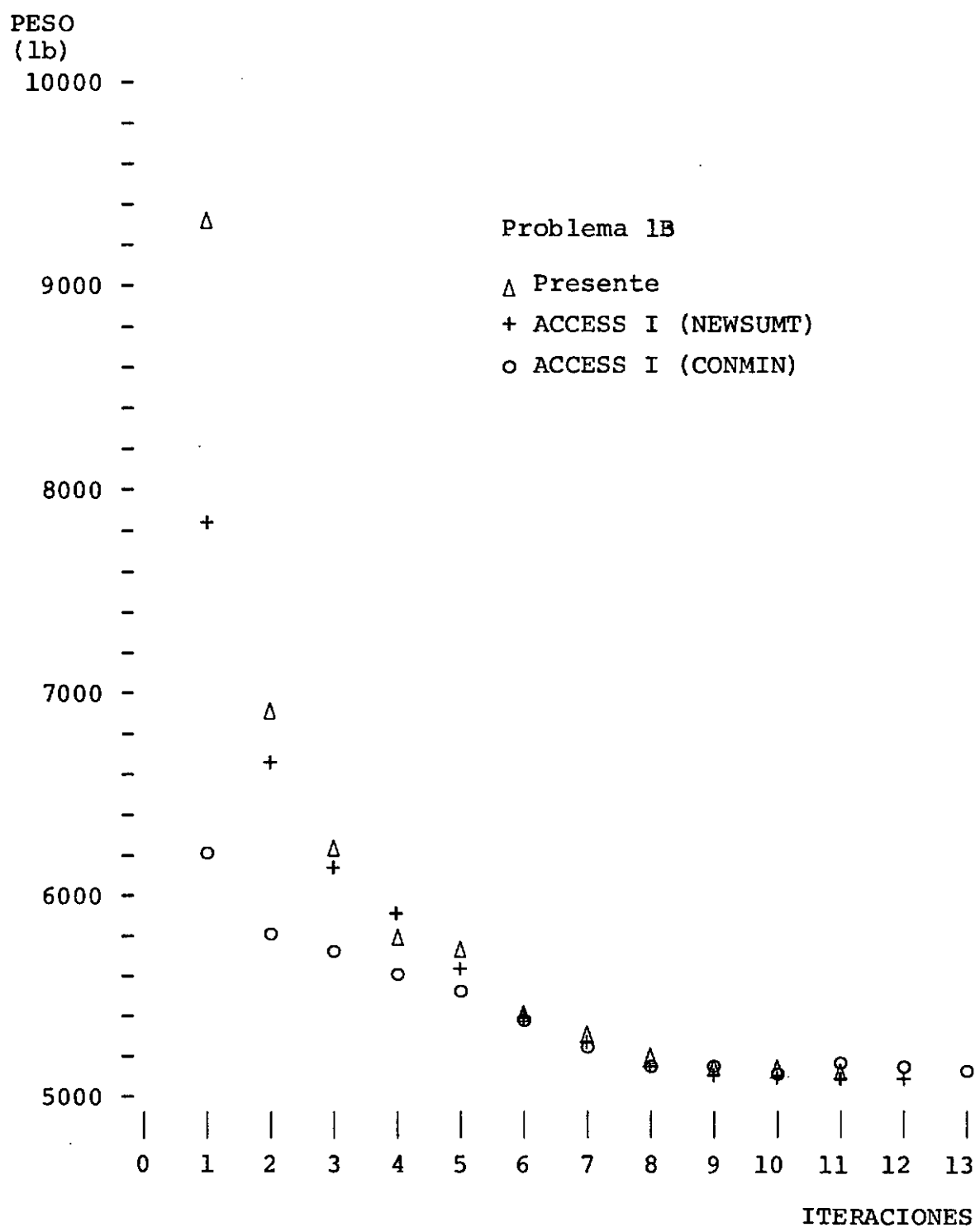


Fig. 6 - Histograma de pesos

8.2.3. Restricciones de Tensión y Pandeo. (Problema 1C)

En el problema 1C, se considera las restricciones siguientes:

- Tensión máxima en todos los elementos - 25.000psi
- Se considera pandeo en los elementos comprimidos, suponiendo $I_{\min} = 0.7A^2$
- Límite inferior para todas las variables - 0.10 in²

La configuración inicial es:

$$x_i = 30 \text{ in}^2 \quad i=1,10$$

Resultados:

Peso inicial - 12589.46

Peso final - 3384.18

Número de iteraciones - 12

La configuración final puede hallarse en la Tabla 6, y los histogramas de peso en la Tabla 7 y Fig. 7.

Elemento Nº	Area Trans- versal(in ²)	Elemento Nº	Area Trans- versal(in ²)
1	8.027	6	0.100
2	0.100	7	5.628
3	19.34	8	23.11
4	13.59	9	5.600
5	0.100	10	2.957

Tabla 6. Diseño Final (Problema 1C)

En dicha configuración, resultaron activas las restricciones siguientes:

- Variables mínimas en los elementos 2,5 y 6
- Tensiones máximas en los elementos 1,3,4,7,8,9 y 10

Comparando estos resultados con los del problema 1A, se ve que el peso obtenido es mayor, lo que era de esperar debido a la introducción de la tensión crítica de pandeo.

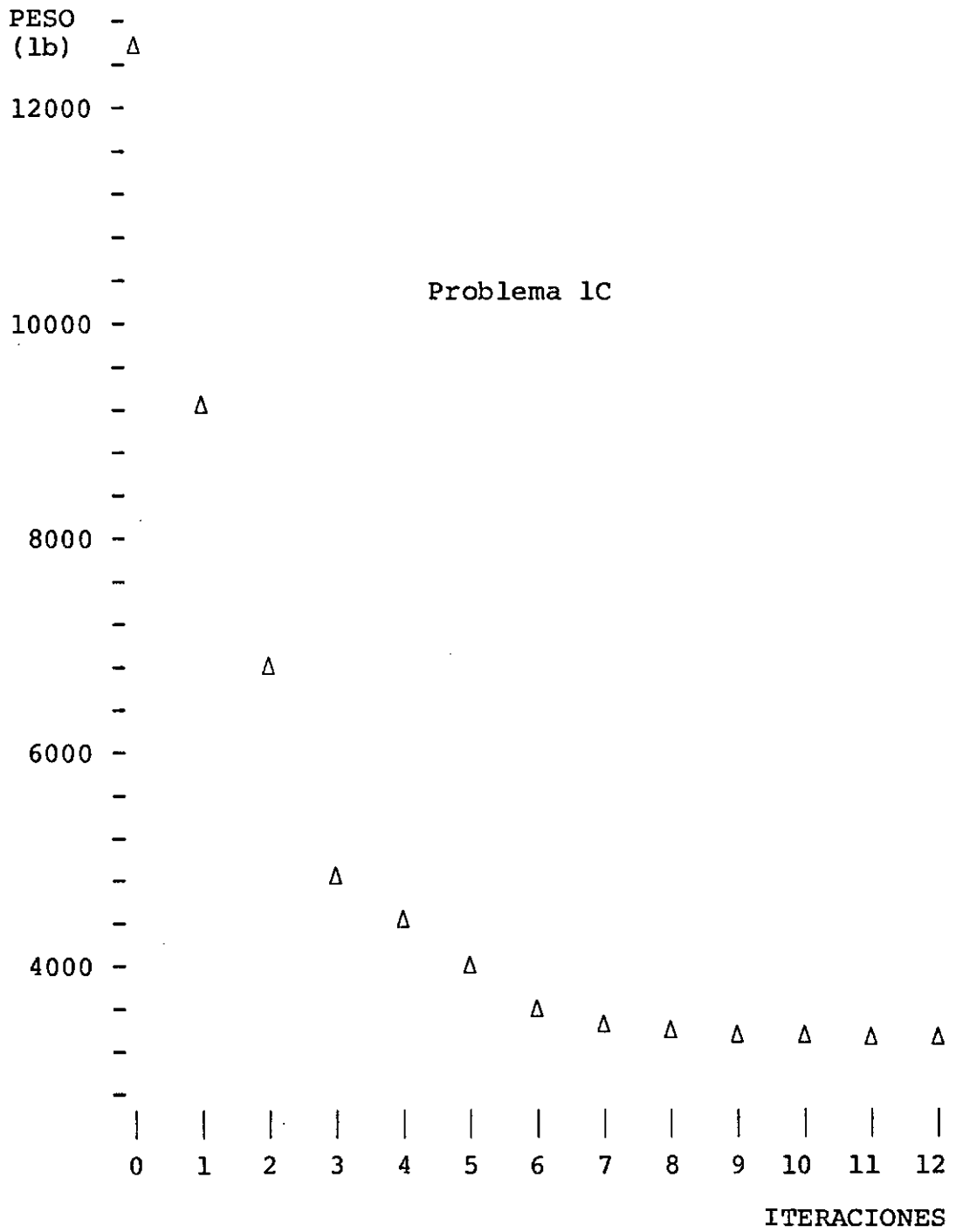


Fig. 7 - Histograma de pesos

ITERACION	PESO(lb)	ITERACION	PESO(lb)	ITERACION	PESO(lb)
INICIAL	12589.4	5	3909.6	10	3392.7
1	9235.3	6	3595.1	11	3387.0
2	6790.6	7	3487.7	12	3384.1
3	4844.1	8	3426.1	-	-
4	4424.5	9	3403.5	-	-

Tabla 7. Histograma de Pesos (Problema 1C)

8.2.4. Restricciones de Tension, pandeo y desplazamiento (Problema 1D)

Describiremos el problema 1D, con las siguientes restricciones:

- Tensión máxima en todos los elementos - 25.000psi
- Desplazamiento máximo en los nodos 1,2,3 y 4 en dirección de las y, en ambos sentidos.
- Se considera pandeo en los elementos comprimidos, suponiendo $I_{\min} = 0.7A^2$
- Límite inferior para todas las variables - 0.10in²

La configuración inicial es

$$x_i = 100. \quad i=1,10$$

Resultados:

Peso inicial - 41964 lb

Peso final - 5109.82 lb

Número de iteraciones - 14

El diseño obtenido concide con el del problema 1B, al igual que las restricciones que son activas en el óptimo. Esto se debe a que los elementos están tan poco cargados, en el problema 1B, que considerar pandeo no afecta la factibilidad de la estructura.

8.3. Viga de Placas y Barras (PROBLEMA 2)

En esta sección será presentado el problema 2. Se trata de un modelo simple de ala de avión.

Descripción:

Su geometria está representada en la Fig. 8. Está compuesta por dos placas iguales, paralelas, unidas por barras. Cada placa está constituida por dos rectángulos ((1,2,4,3) y (3,4,5,6) en la superior) y un triángulo ((5,6,7)) de espesores independientes.

Fue modelada, según se indica en la Tabla 8 resultando

- 31 elementos de reticulado
- 10 elementos tipo membrana triangular
- 21 variables de diseño
- 30 grados de libertad independientes
- Se condiciona desplazamientos nulos en los nodos 1,2,8 y 9.
- Módulo de elasticidad - $10 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$
- Peso específico - 0.10 lb/in^3
- 2 estados de carga:

Estado 1 - $10000. \text{ lb}$ actuando en el nodo 7 en dirección de las z positivas.

Estado 2 - $20000. \text{ lb}$ actuando en el nodo 5 en dirección de las z positivas.

Restricciones:

- Tensión máxima en todos los elementos - $10000. \text{ lb/in}^2$
- Desplazamiento máximo de todos los nodos, en dirección de las z , en ambos sentidos - $2. \text{ in}$
- Area transversal mínima en todas las barras - 0.1 in^2
- Espesor mínimo en todas las membranas - 0.02 in

Configuración inicial:

$$x_i = 1. \text{ in}^2 \quad i=1,2,3,4,5,17,18,19,20,21$$

$$x_i = 4. \text{ in}^2 \quad i=9,10,11,12,13,14,15,16$$

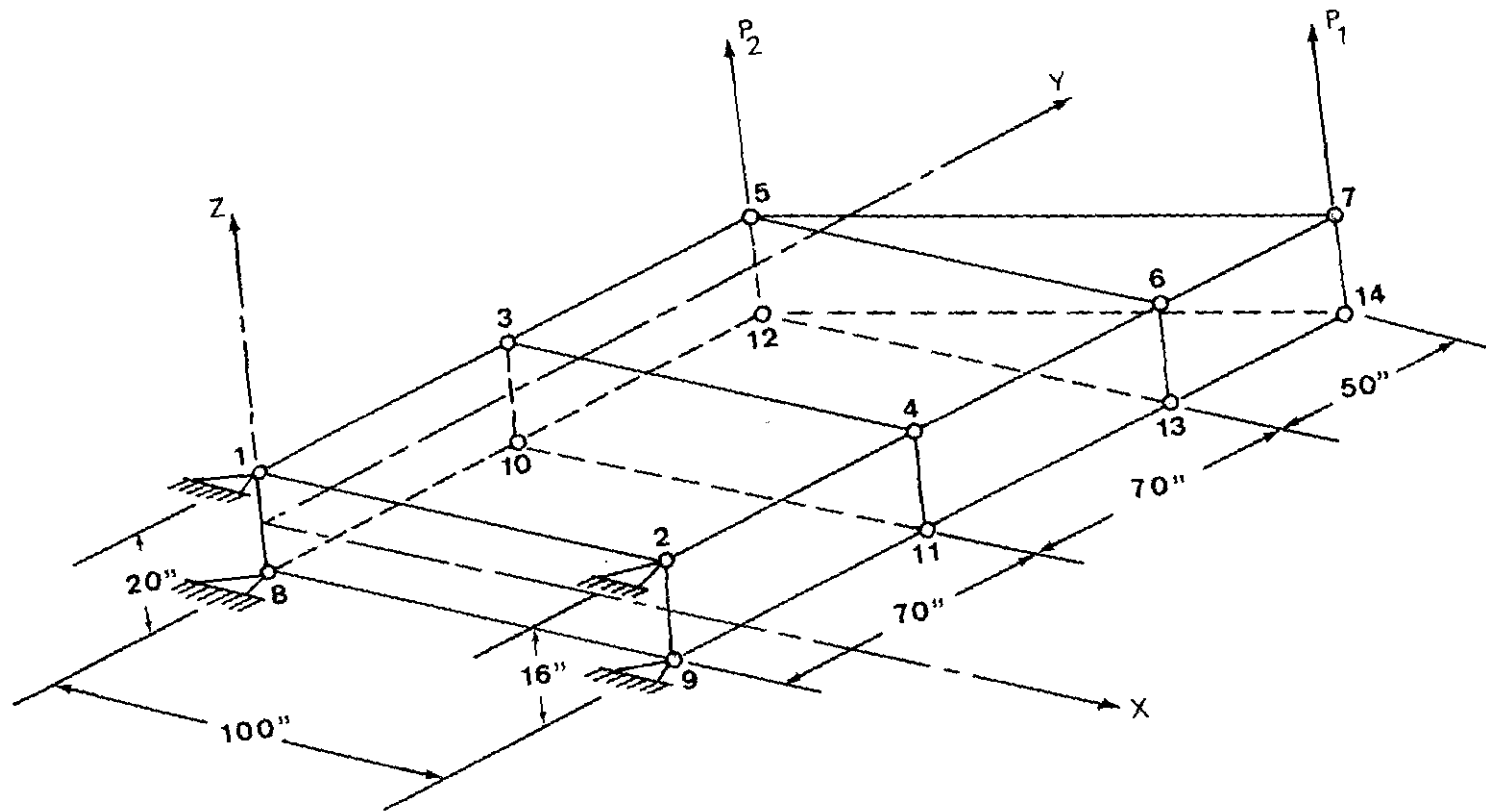


Fig. 8 - Viga de placas y barras (Problema 2)

Variable de Diseño	Nº de Elemento	Tipo	Nodos Corresp.		
1	1	B	1	3	
	6		8	10	
2	2	B	3	5	
	7		10	12	
3	3	B	2	4	
	8		9	11	
4	4	B	4	6	
	9		11	13	
5	5	B	6	7	
	10		13	14	
6	11	MT	1	2	4
	12		4	3	1
	16		8	9	11
	17		11	10	8
7	13	MT	3	4	6
	14		6	5	3
	18		10	11	13
	19		3	12	10
8	15	MT	5	6	7
	20		12	13	14
9	21	B	1	10	
	22		3	8	
10	23	B	3	12	
	24		5	10	
11	25	B	2	11	
	26		4	9	
12	27	B	4	13	
	28		6	11	
13	29	B	6	14	
	30		7	13	
14	31	B	3	11	
	32		4	10	
15	33	B	5	13	
	34		6	12	
16	35	B	5	14	
	36		7	12	
17	37	B	3	10	
18	38	B	5	12	
19	39	B	4	11	
20	40	B	6	13	
21	41	B	7	14	

Tabla 8. Definición de los elementos y grupos de unión (Problema 2)

B - Barra

MT - Membrana triangular

$$x_i = 2.in \quad i=6,7,8$$

Resultados:

Peso inicial - 1261.46 lb

Peso final - 561.26 lb

Número de iteraciones - 11

La configuración obtenida está indicada en la Tabla 9 y el proceso de reducción de peso, en la Tabla 10 y la Fig. 9.

Variable Nº	Area Trans- versal(in ²)	Variable Nº	Area Trans- versal(in ²)	Variable Nº	Area Trans- versal(in ²)
1	1.318	2	0.100	3	0.100
4	0.308	5	0.100	9	3.363
10	3.395	11	2.071	12	2.100
13	1.653	14	0.100	15	0.100
16	1.363	17	0.100	18	1.016
19	0.100	20	0.100	21	0.496
Variable Nº	Espesor (in)	Variable Nº	Espesor (in)	Variable Nº	Espesor (in)
6	0.132	7	0.076	8	0.056

Tabla 9. Diseño Final (Problema 2)

ITERACION	PESO(lb)	ITERACION	PESO(lb)	ITERACION	PESO(lb)
INICIAL	1261.46	4	665.78	8	568.82
1	1007.03	5	644.53	9	565.45
2	817.12	6	596.70	10	563.50
3	738.75	7	573.63	11	561.26

Tabla 10. Histograma de Pesos (Problema 2)

En el diseño obtenido, resultaron activas las siguientes restricciones:

- Valor mínimo en las variables 2,3,5,14,15,17,19 y 20
- Tensión máxima en los elementos 1,6,12,17,21,22 y 24; en el segundo estado de carga

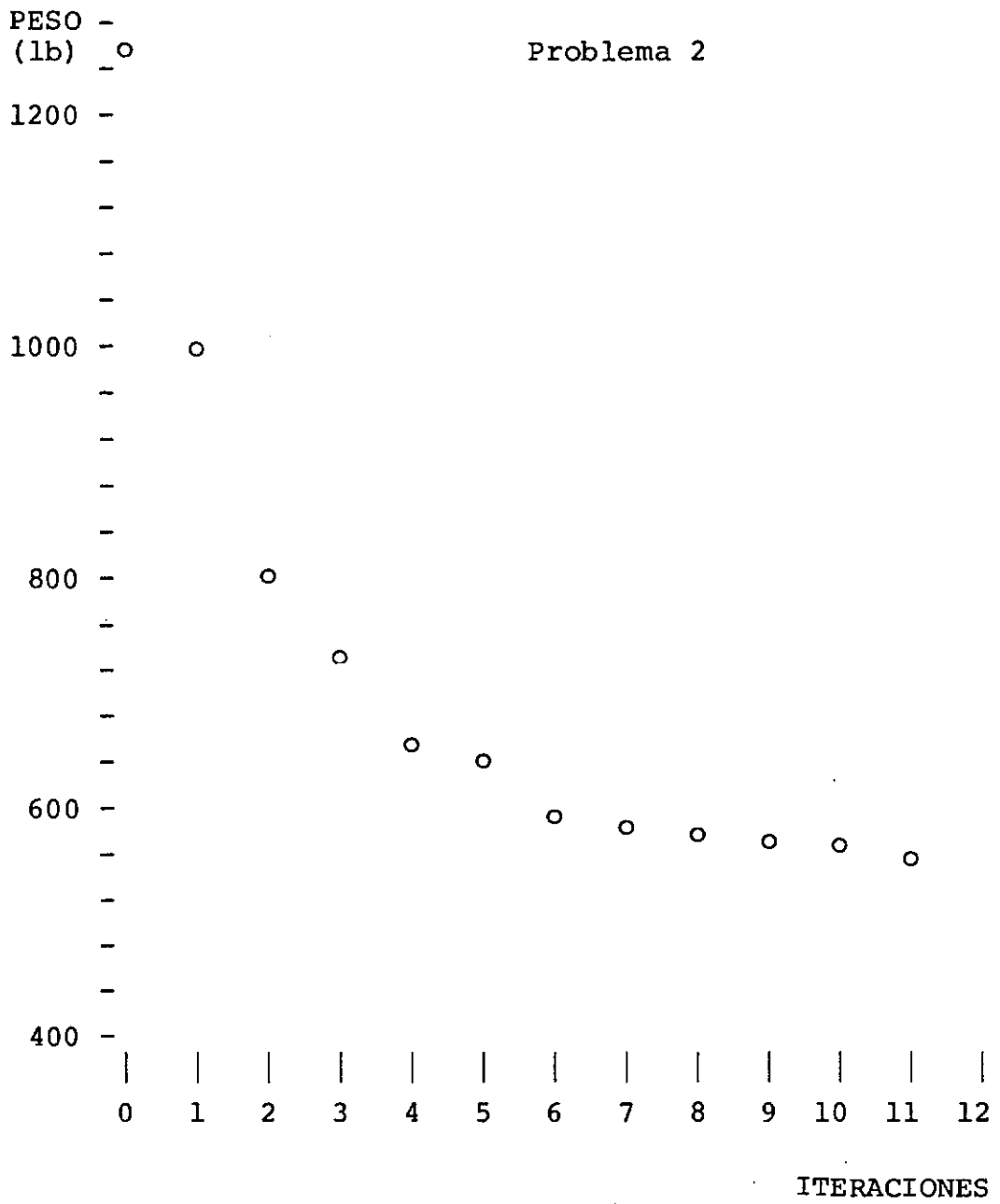


Fig. 9 - Histograma de pesos

- Desplazamiento máximo en el nodo 7; en el primer estado de carga

8.4. Torre de 72 Barras (PROBLEMA 3)

Descripción:

La geometría de la torre y la numeración de los no dos se muestran en la Fig. 10, en tanto que los elementos y grupos de unión están descritos en la Tabla 11.

- 72 elementos de reticulado
- 16 variables de diseño
- 48 grados de libertad independientes
- Se condiciona desplazamientos nulos en los nodos 17,18,19 y 20
- Módulo de Elasticidad - 10×10^6 psi
- Peso específico - 0.10 lb/in^3
- 2 Estados de carga:
 - Estado 1 - 5000 lb actuando en las direcciones x positiva, y positiva, z negativa del nodo 1
 - Estado 2 - 5000 lb actuando en dirección de las z negativas en los nodos 1,2,3 y 4

Esta estructura da lugar a dos problemas, en los que se varían las restricciones.

8.4.1. Restricciones de tensión y desplazamiento (Problema 3A)

En el problema 3A, se consideran las siguientes restricciones:

- Tensión máxima en todos los elementos - 25000. psi
- Desplazamiento máximo de todos los nodos, según las direcciones x,y,z en ambos sentidos - 0.25 in
- Area transversal mínima de todos los elementos - 0.1 in^2

La configuración inicial es

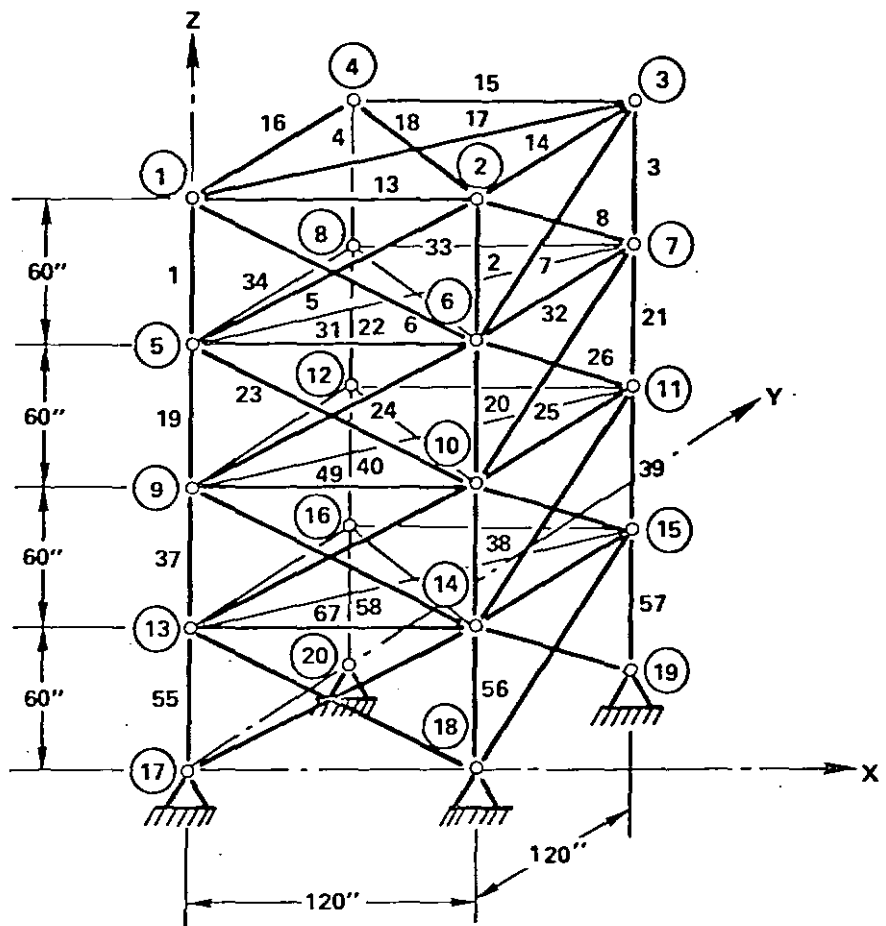


Fig. 10. Torre de 72 Barras (Problema 3)

Elemento	Variable de Diseño	Nodos		Elemento	Variable de Diseño	Nodos	
1	1	1	5	37	9	9	13
2	1	2	6	38	9	10	14
3	1	3	7	39	9	11	15
4	1	4	8	40	9	12	16
5	2	2	5	41	10	10	13
6	2	1	6	42	10	9	14
7	2	3	6	43	10	11	14
8	2	2	7	44	10	10	15
9	2	4	7	45	10	12	15
10	2	3	8	46	10	11	16
11	2	1	8	47	10	9	16
12	2	4	5	48	10	12	13
13	3	1	2	49	11	9	10
14	3	2	3	50	11	10	11
15	3	3	4	51	11	11	12
16	3	4	1	52	11	12	9
17	4	1	3	53	12	9	11
18	4	2	4	54	12	10	12
19	5	5	9	55	13	13	17
20	5	5	10	56	13	14	18
21	5	7	11	57	13	15	19
22	5	8	12	58	13	16	20
23	6	6	9	59	14	14	17
24	6	5	10	60	14	13	18
25	6	7	10	61	14	15	18
26	6	6	11	62	14	14	19
27	6	8	11	63	14	16	19
28	6	7	12	64	14	15	20
29	6	5	12	65	14	13	20
30	6	8	9	66	14	16	17
31	7	5	6	67	15	13	14
32	7	6	7	68	15	14	15
33	7	7	8	69	15	15	16
34	7	8	5	70	15	16	13
35	8	5	7	71	16	13	15
36	8	6	8	72	16	14	16

Tabla 11 - Definición de los elementos y grupos de unión
(Problema 3)

$$x_i = 1 \cdot \ln^2 \quad i=1,16$$

Resultados:

Peso inicial - 853.08 lb

Peso final - 380.66

Iteraciones - 12

En la Tabla 12 está indicada la configuración final, juntamente con las de la literatura. En la Tabla 13 y en la Fig. 11 se indican los diagramas de peso.

VARIABLE Nº	Areas Transversales (in ²)		
	ACCESS I (NEWSUMT)	ACCESS I (CONMIN)	PRESENTE
1	0.1565	0.1558	0.1704
2	0.5458	0.5484	0.5379
3	0.4105	0.4105	0.4055
4	0.5669	0.5614	0.5655
5	0.5223	0.5228	0.5757
6	0.5173	0.5161	0.5238
7	0.1000	0.1000	0.1000
8	0.1000	0.1133	0.1000
9	1.267	1.268	0.1258
10	0.5118	0.5111	0.5069
11	0.1000	0.1000	0.1000
12	0.1000	0.1000	0.1000
13	1.885	1.885	1.918
14	0.5125	0.5118	0.5118
15	0.1000	0.1000	0.1000
16	0.1000	0.1000	0.1000
Peso Final(lb)	379.64	379.79	380.66
Análisis Realizados	9	8	13

Tabla 12. Diseños Finales (Problema 3A)

Resultaron activas las siguientes restricciones:

- Valor mínimo en las variables 7,8,11,12,15 y 16
- Desplazamientos máximos en las direcciones x e y del nodo 1, para el estado de carga 1

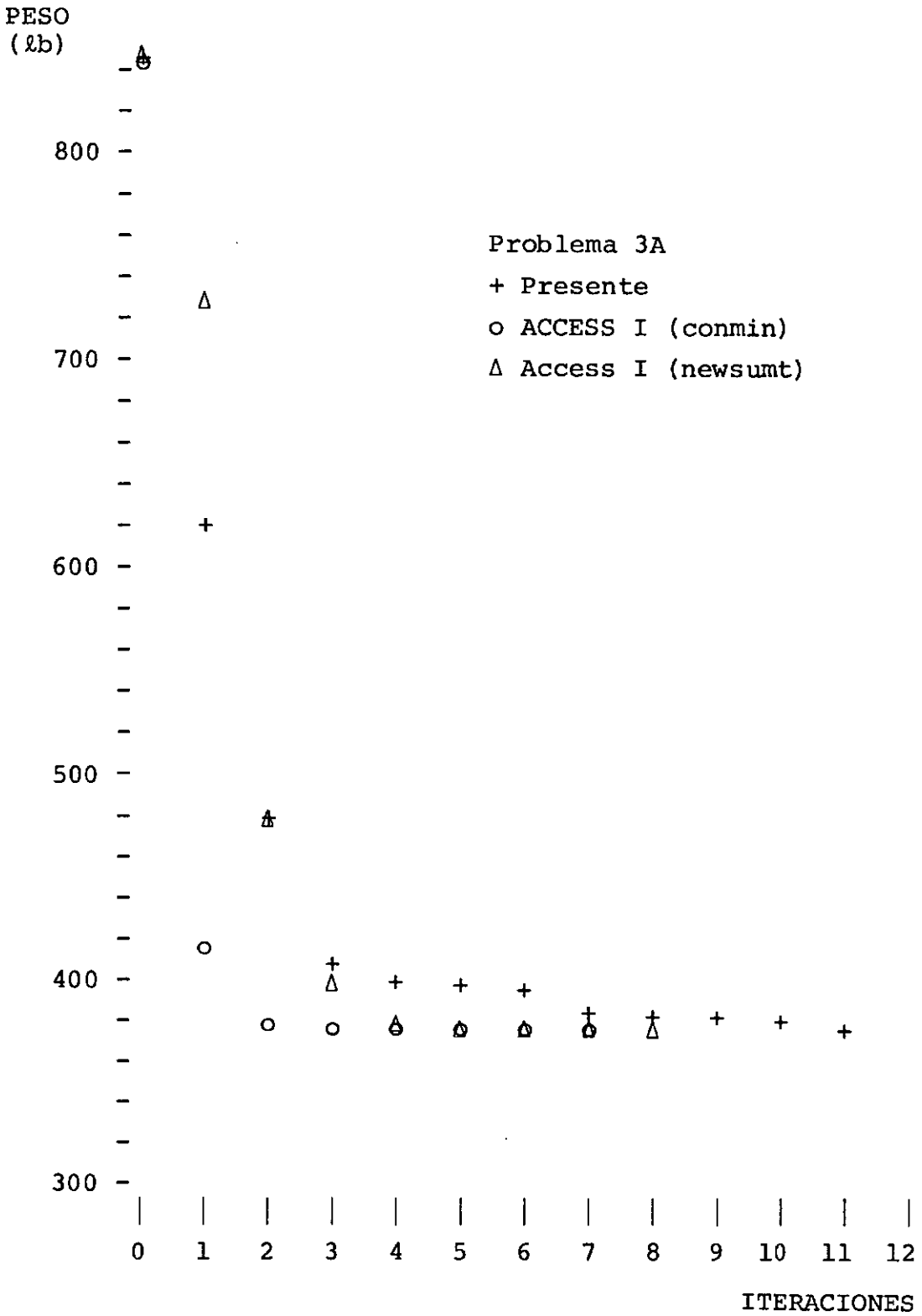


Fig. 11 - Histogramas de pesos

ITERACION	Pesos (lb)		
	ACCESS I (NEWSUMT)	ACCESS I (CONMIN)	PRESENTE
INICIAL	853.08	853.08	853.08
1	731.15	415.15	625.21
2	477.95	383.79	478.79
3	397.43	380.63	409.34
4	383.27	380.42	397.21
5	380.47	379.91	395.52
6	379.86	379.79	393.08
7	379.68	379.79	387.40
8	379.64	-	386.12
9	-	-	384.04
10	-	-	382.27
11	-	-	382.15
12	-	-	380.66

Tabla 13. Histogramas de Pesos (Problema 3A)

8.4.2. Restricciones de Tensión, Pandeo y Desplazamiento (Problema 3B)

Se describe el problema 3B, en el que se consideran las mismas restricciones que en el 3A, incluyendo pandeo en los elementos comprimidos.

Se supone

$$I_{\min} = 0.7A^2$$

La configuración inicial es

$$x_i = 2.in^2 \quad i=1,16$$

Resultados:

Peso inicial - 1706.16 lb

Peso final - 466.50

Iteraciones - 18

La configuración final se indica en la Tabla 14, y el diagrama de pesos en la Tabla 15 y Fig. 12.

Variable Nº	Area Trans- versal(in ²)	Variable Nº	Area Trans- versal(in ²)	Variable Nº	Area Trans- versal(in ²)
1	0.7297	7	0.1000	13	1.067
2	0.7818	8	0.2272	14	0.6309
3	0.5779	9	0.8068	15	0.1191
4	0.9419	10	0.6475	16	0.1000
5	0.7522	11	0.1794		
6	0.6063	12	0.2901		

Tabla 14. Diseño Final (Problema 3B)

ITERACION PESO(lb)		ITERACION PESO (lb)		ITERACION PESO (lb)	
INICIAL	1706.17	7	622.28	14	482.18
1	1457.67	8	581.91	15	475.73
2	1356.42	9	552.23	16	471.95
3	1061.83	10	529.88	17	469.03
4	877.24	11	512.98	18	466.50
5	758.11	12	500.07		
6	678.14	13	490.05		

Tabla 15. Histograma de Pesos - (Problema 3B)

Resultaron activas las siguientes restricciones:

- Valor mínimo en las variables 7, 15 y 16
- Desplazamientos máximos en las direcciones x e y del nodo 1, con el estado de carga 1.
- Tensión máxima en los elementos 6,11,24,29,42,47, 62 y 63 también con el estado de carga 1.

Comparando este problema con el 3A, se observa que aparecieron restricciones de tensión activas, y se obtuvo un peso mayor, como era de esperar.

El número de iteraciones fué muy alto y la curva

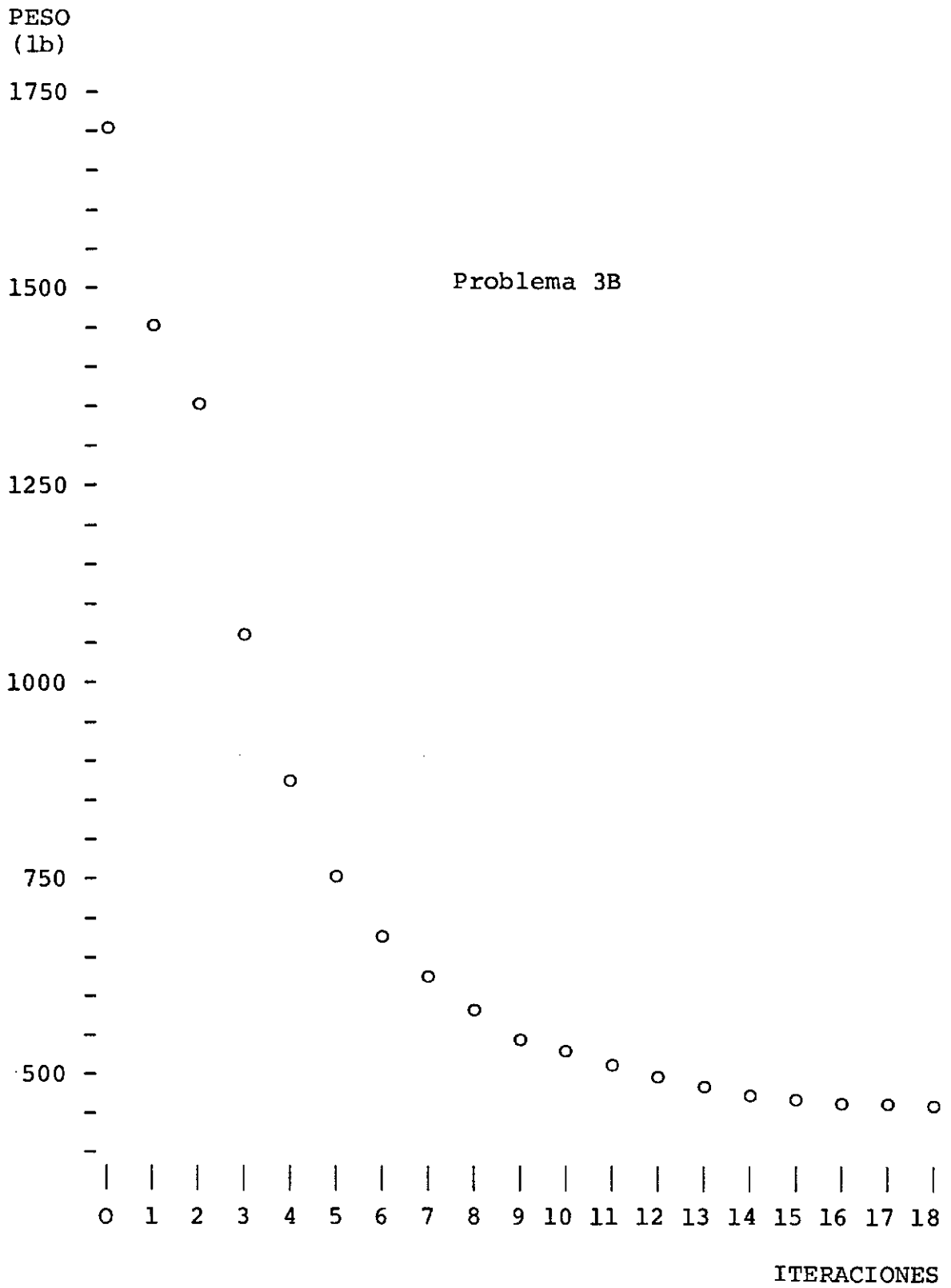


Fig.12 - Histograma de pesos

de pesos es de caída muy suave. Esto se debe a que en este ejemplo el valor asumido para d , permite pasos muy cortos.

8.5. Reticulado Plano de 200 Elementos (PROBLEMA 4)

Descripción:

La geometría de la estructura y la numeración de nodos y elementos, se muestran en la Fig. 13. Los grupos de unión se definen de manera que exista un eje de simetría vertical.

- 200 elementos de reticulado
- 105 variables de diseño
- 150 grados de libertad independientes
- Se considera desplazamientos nulos en los nodos 76 y 77.
- Módulo de elasticidad - 30×10^6 psi
- Peso específico - $.283 \text{ lb/in}^3$
- 3 estados de carga:

Estado 1. 1000 lb actuando en dirección de las x positivas en los nodos 1,6,15,20,29,34,43,48,57, 62,71.

Estado 2. 10.000 lb actuando en dirección de las y negativas en los nodos 1,2,3,4,5,6,8,10,12,14, 15,16,17,18,19,20,22,24,...,71,72,73,74,75.

Estado 3. Cargas de los estados 1 y 2 actuando simultaneamente.

Restricciones:

- Tensión máxima en todos los elementos - 10.000psi
- Desplazamiento máximo de todos los nodos, en todas las direcciones - 0.5 in
- Área transversal mínima de todos los elementos - 0.1 in^2

La configuración inicial es

$$x_i = 15 \text{ in}^2 \quad i=1,105$$

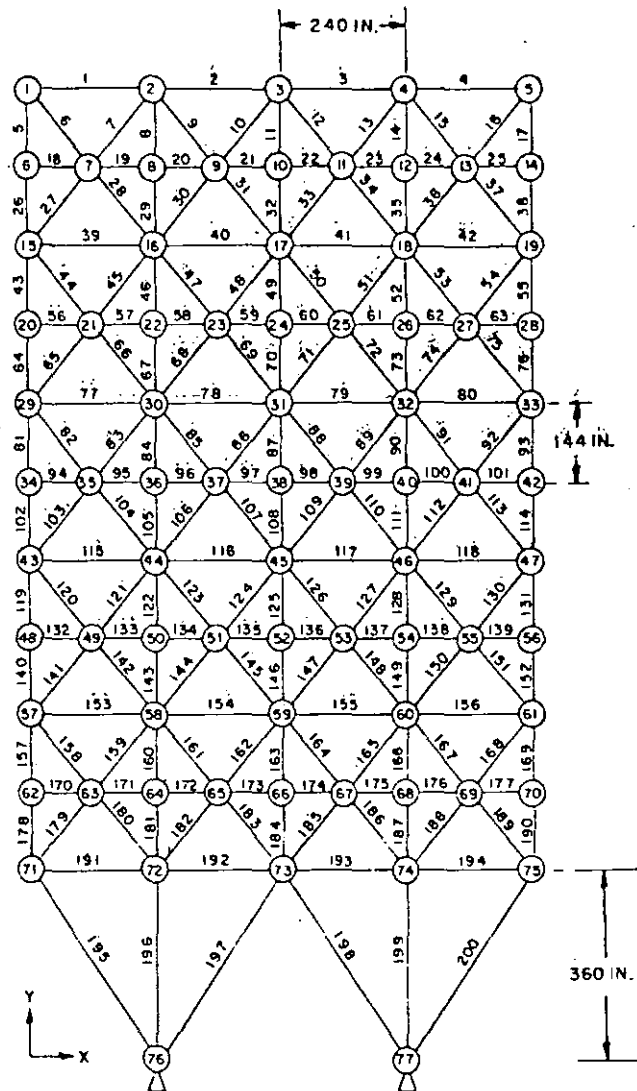


Fig. 13. Reticulado Plano de 200
Elementos (Problema 4)

Resultados:

Peso inicial - 149450. lb

Peso final - 28924. lb

Iteraciones - 18

El.Nº	Area	El.Nº	Area	El.Nº	Area	El.Nº	Area	El.Nº	Area
1	.217	40	.100	81	9.521	120	2.255	159	.100
2	.100	43	7.799	82	.593	121	.100	160	11.72
5	4.743	44	.401	83	.100	122	8.233	161	1.607
6	.167	45	.100	84	6.082	123	.154	162	.377
7	.100	46	3.905	85	.595	124	1.079	163	9.35
8	1.660	47	.354	86	.543	125	7.491	170	.103
9	.231	48	.370	87	5.859	132	.103	171	.269
10	.153	49	3.889	94	.103	133	.234	172	.269
11	1.744	56	.103	95	.105	134	.234	173	.305
18	.103	57	.118	96	.105	135	.242	178	9.923
19	.188	58	.118	97	.106	140	10.44	179	.282
20	.188	59	.149	102	10.41	141	.270	180	2.906
21	.103	64	8.991	103	.162	142	2.169	181	12.64
26	6.635	65	.100	104	.604	143	9.142	182	.356
27	.100	66	.449	105	6.976	144	1.111	183	1.613
28	.237	67	4.830	106	.560	145	.197	184	10.25
29	2.720	68	.386	107	.617	146	8.423	191	7.320
30	.211	69	.410	108	6.819	153	1.950	192	5.774
31	.291	70	4.904	115	1.409	154	1.042	195	12.70
32	2.926	77	.292	116	1.235	157	9.236	196	15.05
39	.100	78	.323	119	9.729	158	3.000	197	8.003

Peso Final - 28924 lb

Tabla 16. Configuración Final obtenida para el Problema 4
(Area en in²)

En la Tablas 16 y 17 se indican las configuraciones obtenidas en este trabajo y en la ref. [24], respectivamente. En la Tabla 18 y Fig. 14, se indica el histograma de pesos de este trabajo.

El.Nº	Area	El.Nº	Area	El.Nº	Area	El.Nº	Area	El.Nº	Area
1	1.348	40	0.233	81	5.737	120	2.558	159	0.210
2	1.313	43	4.798	82	1.988	121	0.237	160	14.981
5	3.402	44	1.850	83	0.201	122	10.649	161	1.175
6	1.771	45	0.127	84	7.220	123	0.966	162	1.251
7	0.173	46	4.318	85	0.984	124	0.991	163	9.800
8	1.497	47	0.971	86	0.797	125	7.822	170	0.116
9	0.742	48	0.749	87	5.626	132	0.116	171	0.816
10	0.782	49	3.346	94	0.116	133	0.634	172	0.816
11	1.156	56	0.116	95	0.491	134	0.634	173	0.703
18	0.116	57	0.333	96	0.491	135	0.512	178	6.713
19	0.377	58	0.333	97	0.318	140	7.285	179	0.713
20	0.377	59	0.208	102	6.688	141	0.587	180	4.281
21	0.435	64	5.662	103	0.533	142	2.835	181	16.104
26	4.575	65	0.519	104	2.151	143	11.752	182	1.309
27	0.538	66	1.950	105	8.288	144	1.049	183	1.317
28	1.895	67	5.326	106	0.884	145	1.011	184	10.950
29	2.483	68	0.813	107	0.984	146	8.969	191	5.073
30	0.750	69	0.954	108	6.770	153	2.495	192	3.243
31	0.784	70	4.495	115	1.687	154	1.024	195	8.983
32	2.278	77	1.391	116	0.605	157	5.695	196	20.687
39	1.294	78	0.343	119	6.274	158	3.932	197	9.594

Peso Final - 31020 lb

Tabla 17 - Configuración final obtenida en la ref. [24] para el problema 4 (Area en in²)

En el diseño final resultaron activas las siguientes restricciones:

- Tensión máxima en los elementos 198, 199, en el estado de carga 3.
- Desplazamiento máximo del nodo 5, en dirección z, para el estado de carga 3.

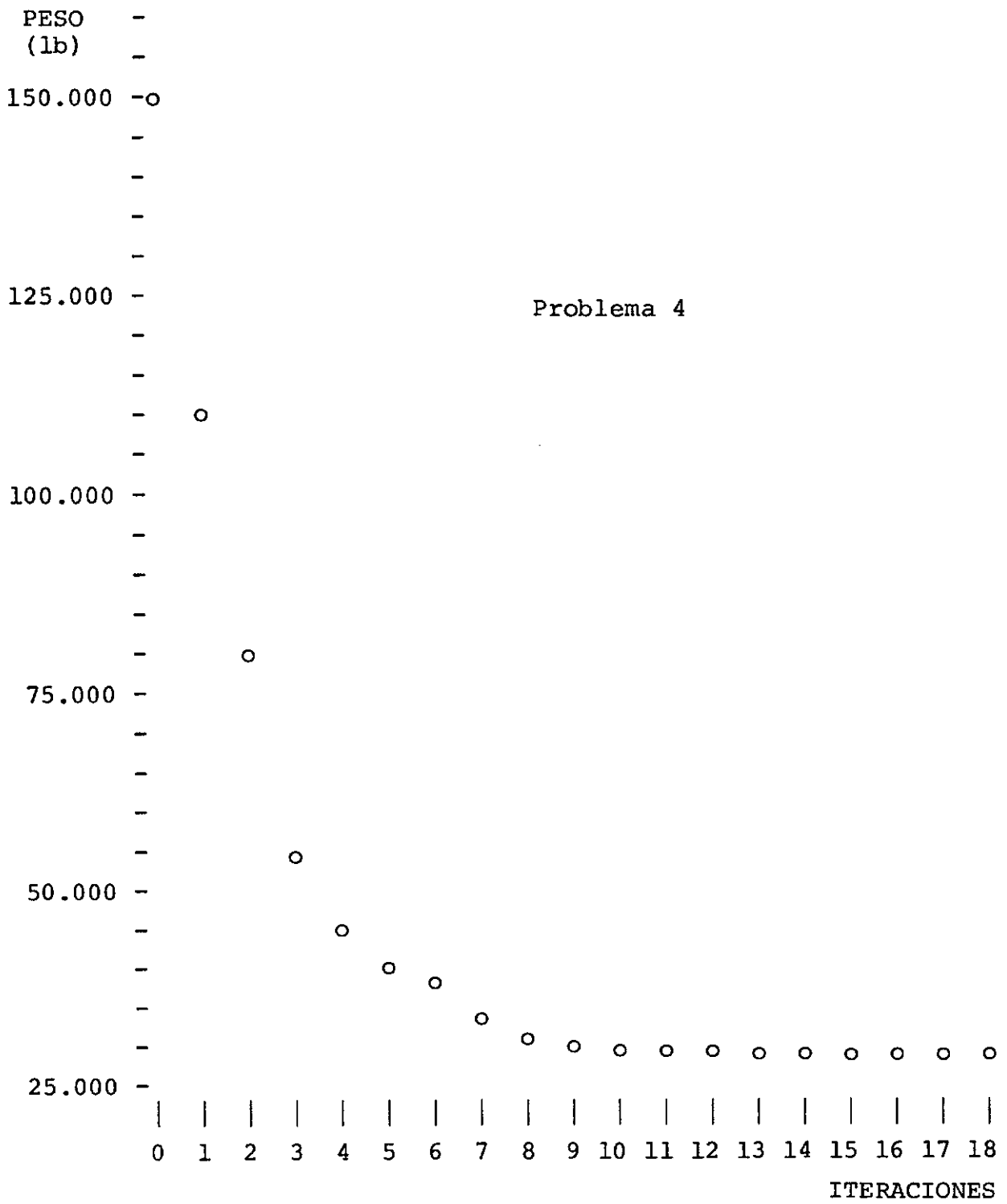


Fig. 14 - Histograma de pesos

ITERACION	PESO(lb.)	ITERACION	PESO(lb.)	ITERACION	PESO(lb.)
INICIAL	149450.	7	34084.	14	29423.
1	110765.	8	31985.	15	29259.
2	80476.	9	31062.	16	29137.
3	55036.	10	30501.	17	29031.
4	45516.	11	30132.	18	28924.
5	41453.	12	29849.		
6	39628.	13	29617.		

Tabla 18. Histograma de Pesos (Problema 4).

8.6. Observaciones sobre el Comportamiento del Sistema

Conviene detallar algunos aspectos del comportamiento del sistema y sus componentes, observados en la resolución de los ejemplos.

- La configuración utilizada para el análisis, y la utilización del preprocesador, permiten una gran eficiencia en la realización de los sucesivos re-análisis y cálculos de derivadas.
- Los histogramas de peso, permiten observar que la disminución de peso es muy rápida en las primeras iteraciones, haciéndose mas lenta al final. En cinco o seis iteraciones, se llegó a pesos bastante cercanos al mínimo.

El número total de iteraciones es competitivo con el obtenido en la literatura.

- El algoritmo demostró ser seguro, en cuanto a que, en ningún caso se obtuvieron configuraciones con grandes infactibilidades en restricciones consideradas por el mismo. En casos en que alguna restricción fue violada, el tratamiento descrito en la sección (5.5), produjo una rápida vuelta a la zona factible en las siguientes iteraciones.
- El conjunto de parámetros utilizados, dio buenos re

sultados en todos los problemas. Solamente en el 3B, con restricciones de pandeo, hubiera sido conveniente cambiar el parámetro d , asignándole un valor mayor.

- Los métodos de filtrado, permitieron una reducción sustancial en el número de restricciones consideradas.
- El tiempo de computación se incrementa mucho con el número de restricciones consideradas. Esto se debe fundamentalmente a la resolución del sistema (5.18), que determina los parámetros λ .

9. CONCLUSIONES

La resolución de los ejemplos tratados, permite concluir que se cuenta con un sistema capaz de resolver, en forma eficiente y competitiva, los problemas estructurales considerados.

Interesa, sin embargo, mejorar la eficiencia del sistema y ampliar la gama de problemas que pueden ser tratados.

Enumeraremos algunos aspectos que pueden contribuir en el aumento de la eficiencia:

- El hallazgo de una definición de las restricciones que sea mas lineal con respecto a las variables de diseño, que la vista en la sección (3.2), permitiría aumentar el valor de los parámetros de tolerancia utilizados.
- El sistema se adapta muy bien a la inclusión de métodos de análisis y derivación aproximados, fundamentalmente en las últimas iteraciones, en que existe muy poca variación de una configuración a otra. Para la resolución del sistema (5.18), que determina los parámetros λ , se pueden utilizar métodos iterativos.
- Una mayor experiencia con estructuras de gran porte, permitirá utilizar métodos más eficientes de filtrado.

La tipos de problemas tratados pueden ser ampliados en las siguientes direcciones:

- Inclusión de otros tipos de restricciones, p.e. de respuesta dinámica y pandeo global de la estructura.
- La utilización de hipótesis similares a las que se tomaron en el caso de pandeo, permitirá la inclusión de otros tipos de elementos finitos. De esta manera, aunque no siempre se consigan soluciones exactas, podrá llegarse a resultados de utilidad

en ingeniería.

- Es posible considerar casos en que el cargamento sea función de las variables de diseño, p.e., el peso propio de los elementos.
- El hecho de que el algoritmo de optimización incluya funciones de mérito no lineales, permite el tratamiento de problemas de optimización geométrica. Es decir, en los que también se consideran variables de diseño, las posiciones geométricas de los nodos de la estructura.
- En muchos tipos de estructuras el proyectista debe elegir sus elementos componentes, de un conjunto discreto, debido a problemas de fabricación. El óptimo con variable de diseño discreta, no tiene por que estar cerca del óptimo con variable continua.

Entendemos, sin embargo, que a partir del conocimiento del óptimo con variable continua, es posible realizar una búsqueda de la configuración óptima con variable discreta, obteniendo ésta, o algún diseño de peso cercano a la misma.

REFERENCIAS

- [1] Fox, R.L., "Optimization Methods for Engineering Design", Addison-Wesley, 1971.
- [2] Schmut, L.A., "Structural Design by Systematic Syntesis", Proc. of the Second National Conference on Electronic Computation, ASCE, 1960, pp. 105-132.
- [3] Vanderplaats, G. and Moses, F., "Structural Optimization by Methods of Feasible Directions", Computers and Structures Vol. 3, n° 4, July 1973.
- [4] Venkayya, V.B., "An Iterative Method for the Analysis of Large Structural Systems", AFFDL-TR-67-194, April 1968.
- [5] Kiusalas, J., "Minimum Weight Design of Structures via an Optimality Criteria", NASA TN-D-7115, December 1972.
- [6] Segenreich, S.A. and McIntosh, S.C., "Weight Optimization under Multiple Ecuality Constraints using an Optimality Criterion", AIAA/ASME/SAE 17th. Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, King of Prussia, Penn., May 1976.
- [7] Rizzi, P., "Optimization of Multi-Constrained Structures Based on Optimality Criteria", AIAA/ASME/SAE 17th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, King of Prussia, Penn., May 1976.
- [8] Melosh, R.J., and Luik, R., "Aproximate Multiple Configuration Analysis and Allocation for Least Weight Structural Design", AFFDL-TR-67-59, 1967.
- [9] Fox, R.L., "Constraint Surface Normals for Structural Synthesis Techniques", AIAA J., vol. 3, n° 8, 1965, pp. 1516-1517.
- [10] Fox, R.L., and Kapoor, M.P., "Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors", AIAA J., vol. 6, n° 12, 1968, pp.2426-2429.
- [11] Storaasli, O.O.; and Sobieszczanski, J., "On the Accuracy of the Taylor Approximation for Structural Resizing", AIAA J., vol. 12, n° 2, 1974, pp. 231-233.

- [12] Fox, R.L.; and Miura, H., "An Approximate Analysis Technique for Design Calculations", AIAA J., vol. 9, n° 1, 1971, pp. 177-179.
- [13] Noor, A.K.; and Lowder, H.E., "Aproximate Techniques of Structural Reanalysis", J. of Computers and Structures, vol. 4, n° 4, 1974, pp. 801-812.
- [14] Noor, A.K.; and Lowder, H.E., "Structural Reanalysis via a Mixed Method", Int.J. of Computers and Structures, vol. 5, n° 1, 1975, pp. 9-12.
- [15] Noor, A.K., "Multiple Configuration Analysis via Mixed Method", J. of the structural Div. ASCE, vol. 100, n° ST9, 1974, pp. 1991-1997.
- [16] Bhatia, K.G., "Rapid Iterative Reanalysis for Automated Design", NASA TN D-6534, 1971.
- [17] Schmit, L.A., and Miura, H., "Aproximation Concepts for Efficient Structural Syntesis", NASA CR-2552, March 1976.
- [18] Schmit, L.A., and Miura, H., "An Advanced Structural Analysis/Synthesis Capability-ACCESS 2", AIAA/ASME/SAE 17th Structures, Structural Dynamics and Material Conference, King of Prussia, Penn., May 1976.
- [19] Zouain, N., "Un algoritmo de optimización para proyecto de estructuras de gran porte", Tésis de M.Sc., COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, diciembre 1976.
- [20] Przemieniecki, J.S., "Theory of Matrix Structural Analysis" McGraw-Hill Book Co., New York, 1968.
- [21] Ranjan Vera, programador; McIntosh S. and Gwin, L., consultores, "SAMGEN", Dept. of Applied Mechanics, Stanford Univ.
- [22] Segenreich, S.A., "Weight Optimization under Flutter Constraints", Ph.D. Dissertation, Department of Aeronautics and Astronautics", Stanford Univ., 1975.
- [23] Smith, G.K.; and Woodhead, R.G., "ADesign Scheme for Ship Structures", The Royal Institution of Naval Architects Paper N° 5, Spring Meeting, April 1973.

- [24] Venkayya, V.B.; Khot, N.S., and Reddy, V.S., "Energy Distribution in an Optimum Structural Design", Air Force Flight Dynamics Laboratory, Wright Patterson Air Force Base, Ohio, March 1969.
- [25] Kavlíe, D., and Moe, J., "Automated Design of Frame Structures", J. of the Structural Div., ASCE, vol. 97, n^o ST 1, 1971, pp. 33-62.
- [26] Haftka, R., "Automated Procedure for Design of Wing Structures to Satisfy Strength and Flutter Requirements", NASA TN D-7264, 1973.
- [27] Gellatly, R.A., "Development of Procedures for Large Scale Automated Minimum Weight Structural Design, AFFDL-TR-66-180, 1966.
- [28] García, J., Gilboa, F., y Chamlian, H., "Tablas y ábacos para proyecto de estructuras", Facultad de Arquitectura, Montevideo.

NOTACION

A	Area de la sección transversal de un elemento axial	
A_i	Matriz de compatibilidad nodal	Ig.(3.9)
b_i	Matriz representativa de la relación deformación-desplazamiento	Ig.(3.5)
$c_j, c_j(x)$	j-ésima restricción	Ig.(2.3)
d	Cota superior de $ \alpha-1 $	Ig.(5.26)
e_i	i-ésimo elemento	
E_i	Módulo de elasticidad de e_i	Ig.(3.26)
$f_i, f_i(v)$	Factor para determinar la razón de corte	Ig.(6.4)
F, F_i	Vector de carga y su i-ésima componente	Ig.(3.14)
G_j	j-ésimo grupo de unión	
$g_j(x), g_j^I(x), g_j^S(x)$	Funciones de respuesta y sus límites inferior y superior respectivamente	Ig.(2.2)
I_{\min}	Momento de inercia mínimo	Ig.(3.26)
k_i	Matriz de rigidez de e_i en coordenadas locales	Ig.(3.7)
\bar{k}_i	Idem en coordenadas globales	Ig.(3.10)
K	Matriz de rigidez total	Ig.(3.10)
K_o		Ig.(8.1)
l_i	Longitud del elemento axial e_i	Ig.(3.26)
m	Número de variables de diseño	
n_i	Número total de grados de libertad de e_i	Sec.(3.3)
n	Número de elementos de la estructura	
p	Número total de grados de libertad nodales	Sec.(3.3)

pr	Número de grados de libertad nodales restringidos	Sec.(3.4)
$P(x)$	Función objetivo, o de mérito	Cap. 2
P_i	Definida en Ig.(5.8)	Ig.(5.6)
RC_i	Razón de corte de la i-ésima restricción	Ig.(6.1)
$R_i(x)$	Razón de respuesta de la i-ésima restricción	Ig.(6.2)
$RMAX$	Razón máxima de respuesta, para todas las restricciones en una configuración	Ig.(6.3)
R	Radio medio de un perfil tubular	Ig.(B.1)
S	Definida en la sección (5.6)	Ig.(5.37)
T_i	Matriz de tensión de e_i	Ig.(3.24)
t_x	Tolerancia en la variación de las variables de diseño	Ig.(5.19)
t_c	Tolerancia en la variación de las restricciones	Ig.(5.23)
t	Espesor de un perfil tubular	Ap.B
U, U_i	Vector de desplazamientos nodales de la estructura y su i-ésima componente	Sec.(3.3)
u_i	Vector de desplazamientos nodales de e_i , en coordenadas locales	Ig.(3.5)
\bar{u}_i	Iden en coordenadas globales	Ig.(3.8)
v_i	Definida en la sección (5.4)	Ig.(5.21)
x, x_i	Vector de variables de diseño, y su i-ésima componente	Ig.(2.1)
x_i^S, x_i^I	Límite superior e inferior a x_i	Ig.(2.1)
z, z_j	Vector de variables de desvío y su i-ésima componente	Sec.(5.2)
α	Parámetro de relajación del algoritmo de optimización	Ig.(5.9)

β_j	Términos independientes del sistema (5.18)	Ig.(5.16)
β_{kj}	Términos del sistema (5.18)	Ig.(5.17)
γ_i	Definida en la sección (3.7)	Ig.(3.27)
δ_{kj}	Símbolo de Kronecker	Ig.(5.17)
δ^I, δ^S	Definidos en la sección (8.1)	Ig.(8.3)
$\epsilon_i, \epsilon_{x_i},$ $\epsilon_{y_i}, \epsilon_{xy_i}$	Vector de deformaciones, y sus componentes, en el caso plano	Sec.(3.3)
η_i	Constante	Ig.(3.29) y(3.31)
θ	Tolerancia en la verificación del criterio de Kuhn-Tucker	Ig.(5.37)
θ_c	Idem	Ig.(5.38)
λ_i	Matriz de cambio de base	Ig.(3.8)
λ, λ_j	Vector de multiplicadores de Lagrange y su i-ésima componente	Ig.(5.5)
$\sigma_i, \sigma_{x_i},$ $\sigma_{y_i}, \tau_{xy_i}$	Vector de tensiones, y sus componentes en el caso plano	Ig.(3.6)
σ_{eq_i}	Tensión equivalente en e_i	Ig.(3.1)
σ_{m_i}	Tensión máxima admitida por el material de e_i	Ig.(3.2)
σ_{cr_i}	Tensión crítica de pandeo en e_i	Ig.(3.2)
τ	Matriz booleana	Ig.(3.16)
ϕ	Función de Lagrange	Ig.(5.5)
X_i	Matriz de elasticidad	Ig.(3.6)
ψ, ψ_i	Definida en la sección (3.3)	Ig.(3.12)

SUPERÍNDICES

T	Matriz transpuesta
---	--------------------

U	Unitario, cuando las variables de diseño son iguales a la unidad	Sec.(3.4)
v	Indica el número de la iteración	

SUBÍNDICES

R	Matriz o vector reducido	Sec.(3.4)
t_i	Tensión en el elemento e_i	Ig.(3.1)
d_i	Desplazamiento en la dirección i	Ig.(3.3)
ad	Admisible (tensión o desplazamiento)	Sec.(3.2)

APÉNDICE A - Elementos Finitos Empleados

Notación

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$	Sistema de coordenadas de referencia
x, y, z	Sistema local de coordenadas
$l_{pq}^m, m_{pq}^n, n_{pq}^p$	Cosenos directores de \bar{pq} , con respecto al sistema de referencia
p, q, r	Nombres de nodos locales
$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$	Desplazamientos en el sistema de referencia
u, v, w	Desplazamientos en el sistema local
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy}$	Componentes del vector de deformaciones, en coordenadas locales
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	Componentes del vector de tensiones, en coordenadas locales
A	Area de la sección transversal de elementos axiales
A_t	Area de elementos triangulares
t	Espesor de elementos triangulares
E	Módulo de elasticidad
L	Longitud de elementos axiales
k	Matriz de rigidez del elemento en coordenadas locales
b	Matriz representativa de la relación deformación-desplazamiento
λ	Matriz de cambio de base
χ	Matriz de elasticidad

A.1. Elemento de Reticulado con Área Transversal Constante

El nodo p es el origen del sistema local de coordenadas.

Relación tensión-desplazamientos nodales

$$\epsilon_x = \left[-\frac{1}{L}, \frac{1}{L} \right] \begin{Bmatrix} u_p \\ u_q \end{Bmatrix}$$

b

Transformación de desplazamientos nodales

$$\begin{Bmatrix} u_p \\ u_q \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} l_{pq} & m_{pq} & n_{pq} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{pq} & m_{pq} & n_{pq} \end{bmatrix}}_{\lambda} \begin{Bmatrix} \bar{u}_p \\ \bar{v}_p \\ \bar{w}_p \\ \bar{u}_q \\ \bar{v}_q \\ \bar{w}_q \end{Bmatrix}$$

Relación tensión-deformación

$$\sigma_x(x) = \frac{E}{\lambda} \epsilon_x(x)$$

Matriz de rigidez en coordenadas locales

$$k = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A.2. Elemento Tipo Membrana Triangular

Hipótesis:

- Material isotrópico
- Espesor uniforme
- Estado plano de tensiones
- Deformación constante

Relación deformación-desplazamientos nodales

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \underbrace{\begin{bmatrix} y_{rq} & -y_{rp} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x_{rq} & x_{rp} & -x_{qp} \\ -x_{rq} & x_{rp} & -x_{qp} & y_{rq} & -y_{rp} & 0 \end{bmatrix}}_b \begin{Bmatrix} u_p \\ u_q \\ u_r \\ v_p \\ v_q \\ v_r \end{Bmatrix}$$

donde

$$x_{ij} = x_i - x_j \quad ; \quad y_{ij} = y_i - y_j$$

Transformación de desplazamientos nodales

$$\begin{Bmatrix} u_p \\ u_q \\ u_r \\ v_p \\ v_q \\ v_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{tr} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{tr} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{tr} \\ \lambda_{pq} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{pq} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{pq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_p \\ \bar{v}_p \\ \bar{w}_p \\ \bar{u}_q \\ \bar{v}_q \\ \bar{w}_q \\ \bar{u}_r \\ \bar{v}_r \\ \bar{w}_r \end{Bmatrix}$$

siendo

$$\lambda_{tr} = [\ell_{tr} \quad m_{tr} \quad n_{tr}]$$

Relación tensión-deformación:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}}_X \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

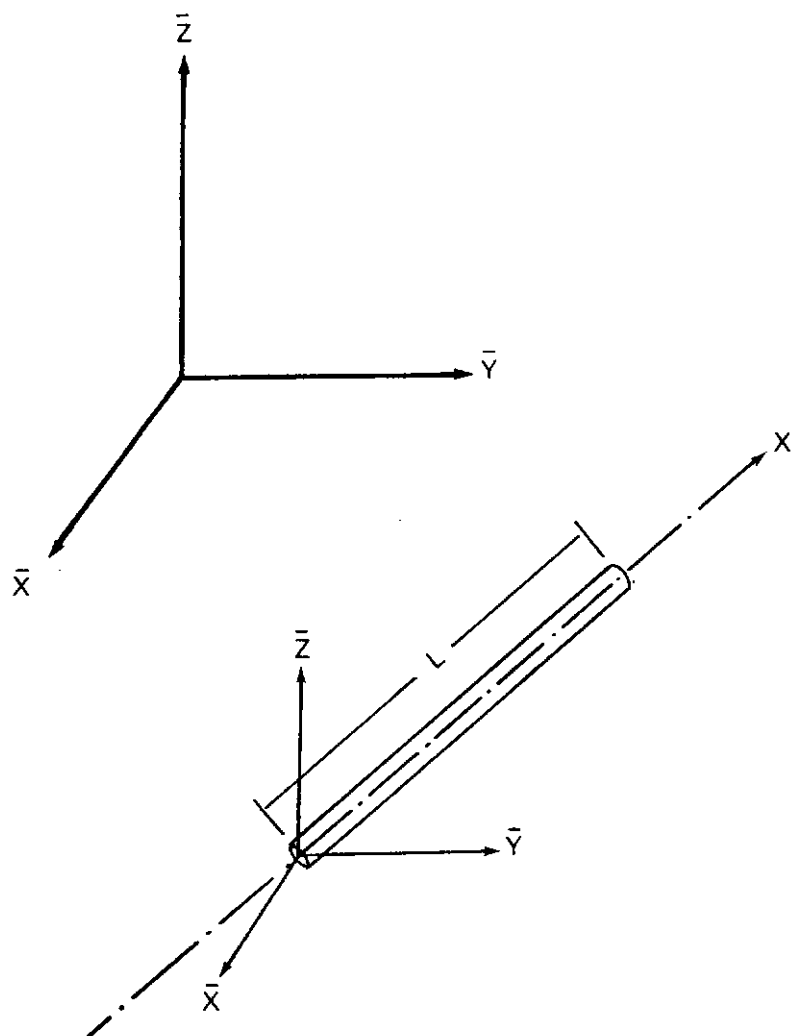
Matriz de rigidez en coordenadas locales

$$k = k_n + k_s$$

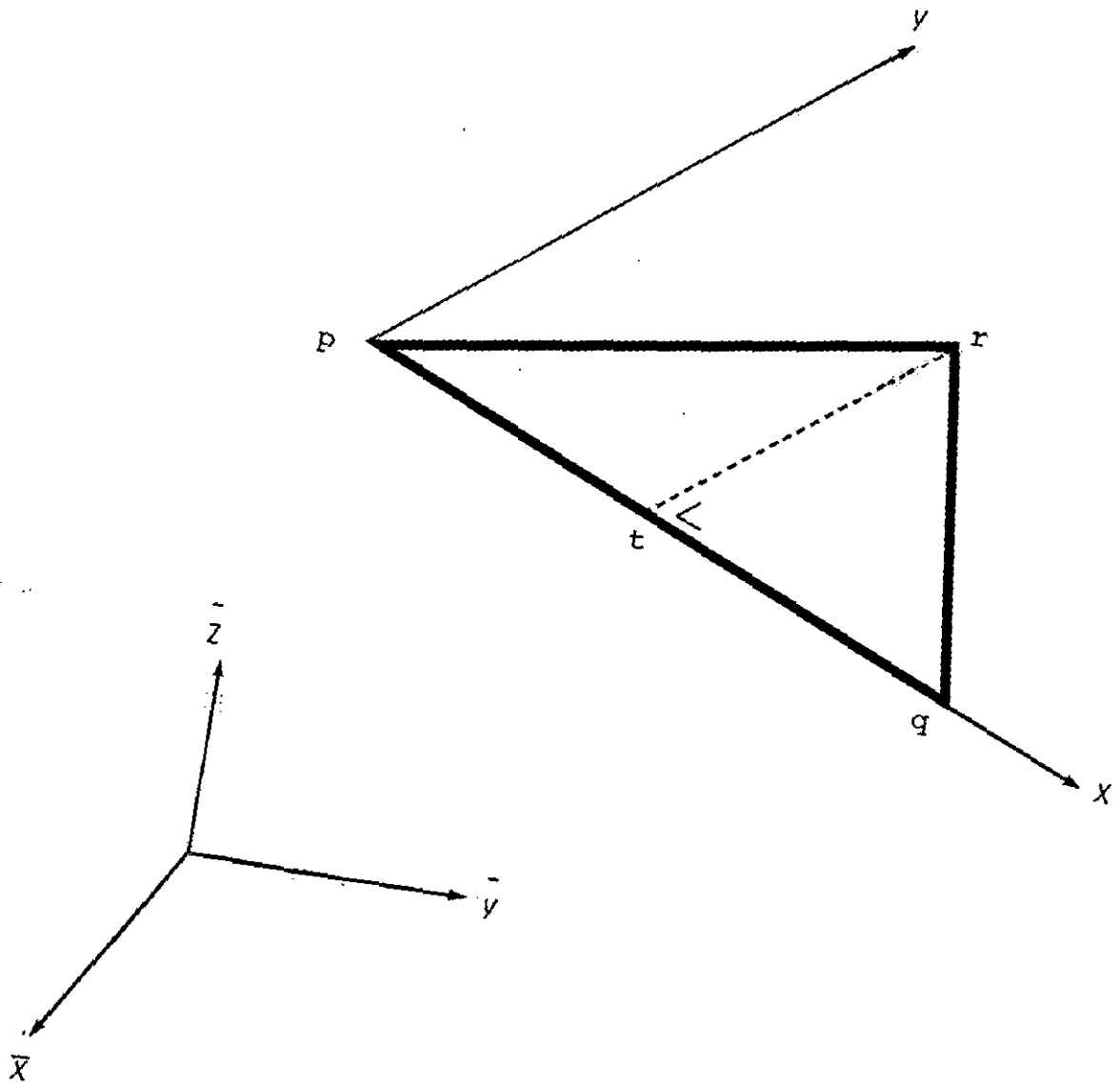
$$k_n = \frac{Et}{4A_t(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} y_{rq}^2 & -y_{rq}y_{rp} & y_{rp}^2 & y_{rq}y_{qp} & -y_{rp}y_{qp} & y_{qp}^2 & -\nu x_{rq}y_{rq} & \nu x_{rq}y_{rp} & -\nu x_{rq}y_{qp} & x_{rq}^2 & -x_{rq}x_{rp} & x_{rp}^2 & -\nu x_{rp}y_{rq} & \nu x_{rp}y_{rp} & \nu x_{rp}y_{qp} & -x_{rp}x_{qp} & x_{rp}^2 & -\nu x_{qp}y_{rq} & \nu x_{qp}y_{rp} & -\nu x_{qp}y_{qp} & x_{rq}x_{qp} & -x_{rp}x_{qp} & x_{qp}^2 \end{bmatrix}$$

simétrica

$$k_s = \frac{Et}{4A_t(1+\nu)} \begin{bmatrix} x_{rq}^2 & & & & & & \\ -x_{rq}x_{rp} & x_{rp}^2 & & & & & \\ x_{rq}x_{qp} & -x_{rp}x_{qp} & x_{qp}^2 & & & & \\ -x_{rq}y_{rq} & x_{rp}y_{rq} & -x_{qp}y_{rq} & y_{rq}^2 & & & \\ x_{rq}y_{rp} & -x_{rp}y_{rp} & x_{qp}y_{rp} & -y_{rq}y_{rp} & y_{rp}^2 & & \\ -x_{rp}y_{qp} & x_{rp}y_{qp} & -x_{qp}y_{qp} & y_{rq}y_{qp} & -y_{rp}y_{qp} & y_{qp}^2 & \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{simétrica} \\ \\ \\ \end{matrix}$$



ELEMENTO DE RETICULADO



MEMBRANA TRIANGULAR

APÉNDICE B. Criterios Prácticos para la Elección de Y(A)
(Sección 3.7)

- i) La adopción de una relación lineal entre el momento mínimo de inercia y el área de la sección transversal, fue adoptada en la ref. [27]. Asumiendo tubos de pared fina y radio medio constante, se verifica

$$I \approx \frac{R^2}{2} A \quad (B.1)$$

donde

R - radio medio

A - área de la sección transversal

- ii) La relación del tipo

$$I_{\min} = \eta A^2 \quad (B.2)$$

es exacta cuando los perfiles son geométricamente semejantes

- a) Para el caso de perfiles tubulares de pared fina, se verifica

$$I \approx \frac{1}{4\pi} \frac{R}{t} A^2$$

siendo t - espesor de pared

Si dichos tubos son geométricamente semejantes, será

$$\frac{R}{t} = \text{constante}$$

- b) Supóngase que en la fabricación de la estructura serán utilizados perfiles de acero L de alas iguales, según DIN 1028 (ref. 27). En los elementos comprimidos, es conveniente utilizar de aquellos perfiles de la tabla cuyo radio de giro mínimo es el mismo, el que tiene menor área

de la sección transversal.

En la Tabla 19 se indican los perfiles elegidos, su área y momento de inercia mínimo, calculándose

$$\eta = \frac{I_{\min}}{A^2}$$

Se observa que para toda la tabla, η varia entre 0.175 y 0.219, lo que hace válido en este caso la adopción de una expresión para I_{\min} de forma indicada en (B.2).

PERFIL			A(cm ²)	I _{min} (cm ⁴)	$\eta = \frac{I_{\min}}{A^2}$
45	45	5	4.30	3.25	0.175
50	50	5	4.80	4.59	0.199
55	55	6	6.31	7.24	0.181
60	60	6	6.91	9.43	0.197
65	65	7	8.70	13.80	0.182
70	70	7	9.40	17.60	0.199
75	75	7	10.10	21.10	0.206
80	80	8	12.30	29.60	0.195
90	90	9	15.50	47.80	0.199
100	100	10	19.20	73.30	0.199
110	110	10	21.20	98.60	0.219
120	120	11	25.40	140.	0.217
130	130	12	30.00	194.	0.215
140	140	13	35.00	262.	0.213
150	150	14	40.30	347.	0.213
160	160	15	46.10	453.	0.213
180	180	16	55.40	679.	0.221

Tabla 19. Perfiles de acero L de alas iguales, a ser utilizados en elementos de reticulado sometidos a compresión.